

Quasistatische Feldsimulationen auf der Basis von Finiten Elementen und Spektralmethoden in der Anwendung auf supraleitende Magnete

Vom Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung
der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

DISSERTATION

von
Dipl.-Ing. Stephan Koch
geboren am 28. Dezember 1977 in Wuppertal

Referent: Prof. Dr.-Ing. Thomas Weiland
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Kay Hameyer
Korreferent: Prof. Dr. Oliver Boine-Frankenheim

Tag der Einreichung: 20.01.2009
Tag der mündlichen Prüfung: 30.03.2009

D 17
Darmstadt 2009

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-19579

URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/1957/>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt.

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

tuprints@ulb.tu-darmstadt.de

Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung-Keine kommerzielle Nutzung-Keine Bearbeitung 2.0 Deutschland



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Kurzfassung

Auf viele in der Praxis anzutreffende Problemstellungen ist eine der quasistatischen Näherungen der Maxwellschen Gleichungen anwendbar. Beispiele ergeben sich innerhalb der Beschleunigertechnik im Rahmen der Auslegung zur Strahlführung benötigter Magnete sowie in der Energietechnik bei der Bestimmung von Betriebsparametern elektrischer Maschinen und der Vorhersage der Hochspannungsfestigkeit von Transformatoren. Während der Design- und Entwicklungsphase derartiger Geräte bietet ein numerisches Modell eine komfortable Alternative zum vergleichsweise teuren Aufbau von Prototypen. Größere Skalenunterschiede in den Materialparametern, den Zeitkonstanten und den geometrischen Abmessungen führen bei klassischen Modellierungsansätzen zu inakzeptabel hohem Speicherbedarf oder unangemessen langen Rechenzeiten. Im Extremfall wird dadurch die Simulation und mitunter auch die erwünschte technische Verbesserung an dem Entwurf unmöglich. In der vorliegenden Arbeit werden zwei Ansätze zur Erweiterung des Einsatzgebietes elektromagnetischer Feldberechnungen verfolgt. Durch die Parallelisierung der Algorithmen und der Simulationswerkzeuge erschließt sich ein Anwendungsgebiet für weitaus größere Finite-Elemente-Modelle als bisher. Dies wird anhand der Berechnung der elektromagnetischen Felder in einem supraleitenden Beschleunigermagneten, der am GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung im Rahmen des Projektes FAIR entwickelt wurde, veranschaulicht. Im zweiten Abschnitt dieser Arbeit führen die im zu untersuchenden Gerät vorhandenen räumlichen Symmetrien zu einem problemangepassten, effizienten und eine hohe Genauigkeit erzielenden Diskretisierungsansatz. Falls sich die räumliche Ausdehnung in einer oder mehreren ausgezeichneten Richtungen als wesentlich größer als in den verbleibenden erweist, reicht ein Modell mit einer geringeren räumlichen Dimension aus. Bei tatsächlich dreidimensionalen Feldverteilungen kann eine solche räumliche Reduktion nicht ohne weiteres durchgeführt werden. Wenn jedoch Teile der Geometrie bestimmte Symmetrien aufweisen, ergibt sich in diesen Bereichen ein glatter räumlicher Verlauf der elektromagnetischen Felder. Unter Verwendung orthogonaler Polynome entlang der glatten Richtung in Kombination mit Finite-Elemente-Ansatzfunktionen in den dazu senkrechten Ebenen, wird eine Diskretisierung mit niedriger Unbekanntenzahl und hoher Genauigkeit erreicht. Die Verbindung zu Bereichen, welche keine Symmetrie aufweisen, erfolgt in Form einer starken Kopplung über einen Gebietszerlegungsansatz. Durch

die Verwendung dieser Strategie wird für bestimmte Beispiele mit einigen hunderttausend Freiheitsgraden ein Genauigkeitsniveau erreicht, für das beim Einsatz klassischer Finite-Elemente-Verfahren mitunter mehrere Millionen Freiheitsgrade erforderlich sind. Dies wird anhand verschiedener Beispiele, wie einem zylindrischen Transformator sowie dem bereits erwähnten Beschleunigermagneten, aufgezeigt.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	iii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Überblick	2
1.2.1 Zielsetzung	2
1.2.2 Vorgehensweise	2
1.2.3 Aufbau der Arbeit	3
2 Beschreibung elektromagnetischer Felder	5
2.1 Die Maxwellschen Gleichungen	5
2.2 Klassifizierung elektromagnetischer Problemstellungen	8
2.3 Statische und quasistatische Formulierungen	12
2.4 Modellierung des Problemvolumens	21
3 Numerische Lösungsansätze	27
3.1 Methode der Finiten Integration	27
3.1.1 Die Gitter-Maxwellgleichungen	28
3.1.2 Die Materialmatrizen	35
3.1.3 Eigenschaften der Methode	40
3.2 Methode der Finiten Elemente	43
3.2.1 Skalare Ansatzfunktionen für Potentiale	44
3.2.2 Vektorielle Ansatzfunktionen für Felder	52
3.2.3 Vektorielle Ansatzfunktionen für Flüsse	56
3.2.4 Skalare Ansatzfunktionen für Ladungsverteilungen	58
3.2.5 Schwache Formulierung	59
3.2.6 Diskretisierung unter Verwendung von Ansatzfunktionen	62
3.3 Spektralverfahren	66
3.3.1 Überblick	66
3.3.2 Methode der spektralen Kollokation	67

3.3.3	Spektrale Galerkin-Verfahren	74
3.4	Zeitliche Diskretisierung	77
4	Numerische Simulationen am Beispiel supraleitender Dipolmagnete	81
4.1	Der SIS-100-Magnet	82
4.2	Simulationsverfahren	86
4.2.1	Modellierung der ferromagnetischen Sättigung	86
4.2.2	Homogenisierung des lamellierten Eisenmaterials	92
4.2.3	Modellierung des Strahlrohrs	97
4.3	Wirbelstromverluste bei zeitveränderlichem Betrieb	102
4.3.1	Modifikation der Ausführung des Eisenjochs und der Spulen	104
4.3.2	Vergleich der unterschiedlichen Materialmodelle	119
4.3.3	Konvergenzstudie im Hinblick auf die Wirbelstromverluste	123
4.3.4	Bestimmung der Wirbelstromverluste im Strahlrohr	128
4.4	Untersuchung der magnetischen Flussdichte im Öffnungsbereich	134
4.4.1	Analytische Darstellung der magnetischen Flussdichte	136
4.4.2	Definition und Auswertung der Feldqualität	138
4.4.3	Feldqualität im statischen Fall	142
4.4.4	Untersuchung der Feldqualität bei zeitabhängiger Anregung	146
5	Kombination von Finite-Elemente-Verfahren und Spektralmethoden	153
5.1	Ausnutzung von Symmetrien	154
5.1.1	Vollständige kontinuierliche Symmetrien	155
5.1.2	Berücksichtigung der dritten Dimension	159
5.1.3	Erweiterung der Anwendbarkeit durch Gebietszerlegung	162
5.2	Hybride Ansatzfunktionen auf der Basis von Tensorprodukten	164
5.2.1	Zweidimensionale Modellierung	164
5.2.2	Hybride Diskretisierung im Symmetriegebiet	171
5.2.3	Kopplung auf der Basis von Lagrange-Multiplikatoren	179
5.3	Anwendungsbeispiele im Rahmen der numerischen Feldsimulation	182
5.3.1	Isolationsverhalten eines Hochspannungstransformators	183
5.3.2	Magnetostatische Simulationen am Beispiel des SIS-100-Magneten	192
6	Zusammenfassung und Ausblick	205
A	Verwendete Abkürzungen	209
B	Notation	211

Literaturverzeichnis	219
Danksagung	237
Lebenslauf	239

1 Einleitung

1.1 Motivation

Im Prozess des Entwurfs und der Optimierung von Schaltungen, Bauteilen wie auch komplexen technischen Geräten gewinnt die numerische Simulation dank der rasanten Entwicklung in der Prozessor- und Speichertechnologie immer mehr an Bedeutung. So ist es heute bereits möglich, teilweise auf eine aufwendige und vor allem kostenintensive Herstellung von Vorserienprodukten zu Versuchs- und Optimierungszwecken zu verzichten. Mit Hilfe von standardisierten Schnittstellen zu CAD-Programmen (engl. „*computer aided design*“) ist die numerische Simulation, auch in frühen Stadien, leicht in den Entwicklungszyklus integrierbar. So können fehlgeleitete Entwicklungen früh erkannt und vermieden werden. Neben mechanischen Simulationen können auf der Basis der vorhandenen CAD-Modelle auch die elektromagnetischen Eigenschaften des zu konstruierenden Bauteils oder Gerätes bestimmt werden. Hierbei kann häufig auf etablierte Simulationsverfahren zurückgegriffen werden, die mit Hilfe von Parallelisierungsstrategien und der hohen und kostengünstigen Verfügbarkeit von Rechenleistung und Arbeitsspeicher effizient eingesetzt werden können. So ist es heutzutage möglich, nicht nur einzelne Komponenten eines komplexen Gerätes zu analysieren, sondern, falls erforderlich, die gesamte Anordnung einschließlich der Beschalungen und Anschlussleitungen innerhalb einer Simulation zu berücksichtigen.

Neben der industriellen Anwendung der numerischen Feldsimulation ergeben sich auch im Rahmen großer Grundlagenforschungsprojekte, insbesondere bei der Auslegung und der Konstruktion von Komponenten neuer Teilchenbeschleuniger, vielseitige Herausforderungen. Diese betreffen sowohl die grundsätzliche physikalische Machbarkeit hinsichtlich der mechanischen Stabilität und der erforderlichen Werkstoffe als auch die elektromagnetischen Eigenschaften. So erfordern beispielsweise einige Experimente eine extrem hohe Teilchenenergie, die nur mit sehr großen Anlagen erreichbar ist. Gleichzeitig besteht eine sehr hohe Anforderung an die Genauigkeit der Ausführung, da bereits kleinste Abweichungen schwerwiegende Konsequenzen haben können, die bis zu einem Ausfall oder der Zerstörung einzelner Bauteile reichen können. In der Folge ergeben sich in gleichem Maße hohe Anforderungen an die zugehörigen numerischen Feldsimulationen. Sie müssen in

der Lage sein, elektromagnetische Phänomene in sehr großen Strukturen sowohl räumlich als auch zeitlich fein aufzulösen, um die von der Anwendung geforderte hohe Genauigkeit zu erreichen. Die Erfüllung dieser Bedingungen führt im allgemeinen zu sehr komplexen und großen numerischen Modellen. Mitunter ist es überhaupt nicht möglich, oder aber sehr zeitaufwendig, eine hinreichend genaue diskrete Darstellung des physikalischen Objektes mittels einer Volumendiskretisierung zu erzeugen, insbesondere im Fall krummlinig berandeter Körper. Auch in diesem Fall besteht in der Parallelisierung klassischer Berechnungsverfahren eine Möglichkeit, den steigenden Anforderungen gerecht zu werden, vorausgesetzt, dass eine gültige räumliche Diskretisierung gefunden werden kann. Die aus Anwendungssicht notwendige Erweiterung des Einsatzbereiches numerischer Simulationen stellt die Motivation für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen dar. Im Vordergrund steht dabei ein supraleitender Beschleunigermagnet, der am GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung im Rahmen des Projektes FAIR zum Einsatz in der Strahlführung innerhalb des Synchrotrons SIS-100 entwickelt wurde.

1.2 Überblick

1.2.1 Zielsetzung

Aufgrund der Komplexität sowie der meist gegebenen erheblichen Unterschiede in den Abmessungen einzelner Baugruppen im Verhältnis zur Größe der gesamten Anordnung sind aufwendige numerische Simulationen erforderlich, um eine vorgegebene Genauigkeit hinsichtlich der Modellierung sowie der Lösung der Maxwell'schen Gleichungen zu erreichen. Dabei bezieht sich der erhöhte Aufwand einerseits auf den Speicherbedarf der Simulationen und andererseits auf die benötigte Rechenleistung, welche sich auf die Simulationsdauer auswirkt. Beide Faktoren können im Extremfall separat oder zugleich eine erfolgreiche Durchführung der gewünschten Berechnung verhindern.

Ziel dieser Arbeit ist es daher, Verfahren zu untersuchen und zu entwickeln, unter deren Verwendung eine effiziente Simulation komplexer elektrotechnischer Bauteile und Geräte möglich ist. Konkrete Beispiele ergeben sich aus der Beschleunigertechnik sowie im Rahmen der industriellen Anwendung im Bereich der Hochspannungstechnik.

1.2.2 Vorgehensweise

Im folgenden werden zwei unterschiedliche Ansätze zur Erweiterung des Einsatzgebietes numerischer Simulationen verfolgt. Da die Steigerungsrate in der Anzahl der von einem

einzelnen Prozessor zu bewältigenden Rechenoperationen pro Zeiteinheit derzeit eine Sättigung erfährt, können Parallelisierungsstrategien eingesetzt werden, welche das zu lösende Problem auf mehrere Rechenkerne verteilen und simultan lösen, um eine Verkürzung der Simulationsdauer zu erreichen. Mit der auf diese Weise durch die Verwendung einer größeren Anzahl einzelner unabhängiger Rechner gesteigerten Rechenleistung steigt gleichzeitig auch der für die Simulationsdaten zur Verfügung stehende Arbeitsspeicher. Dieser Strategie folgend, erschließt sich ein erheblich größeres Anwendbarkeitsgebiet klassischer numerischer Verfahren wie der Methode der Finiten Elemente sowohl hinsichtlich der Modellgröße als auch der Simulationsdauer.

Ein weiterer Ansatz besteht in der Verwendung spezieller, auf den jeweiligen Anwendungsbereich zugeschnittener Verfahren, welche die Eigenschaften der zu simulierenden Struktur ausnutzen, um numerische Modelle geringerer Größe und in der Folge kürzere Simulationszeiten zu ermöglichen. Eine solche Klasse bilden hybride Verfahren, welche über einen Gebietszerlegungsansatz die Vorteile verschiedener Methoden in voneinander abgegrenzten Teilgebieten kombinieren. Unter bestimmten Umständen kann auf diese Weise eine deutliche Verbesserung im Vergleich zu klassischen Methoden erzielt werden. Derartige hybride Diskretisierungsverfahren werden im Rahmen dieser Arbeit mit dem Ziel der Berechnung statischer sowie quasistatischer elektromagnetischer Felder entwickelt. Anhand praxisrelevanter Beispiele erfolgt eine Untersuchung der Leistungsfähigkeit der hybriden Verfahren sowie eine Verifikation durch den Vergleich mit den Ergebnissen konventioneller Berechnungsmethoden.

1.2.3 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der numerischen Berechnung elektromagnetischer Felder. Daher werden in Kapitel 2 zunächst die klassischen Grundlagen zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen elektrischen und magnetischen Phänomenen in Form der Maxwellschen Gleichungen behandelt. Im Hinblick auf die Zeitskala sowie die räumliche Ausdehnung der zu untersuchenden Struktur ergibt sich eine Unterteilung in einzelne Anwendungsgebiete, innerhalb derer unterschiedliche Vereinfachungen zulässig sind, welche zu einer teilweisen Entkopplung des Systems von Differentialgleichungen führen. In Abschnitt 2.2 werden Kriterien für deren Anwendbarkeit angegeben. Für den im Rahmen dieser Arbeit relevanten Bereich der statischen und quasistatischen Näherung existieren verschiedene Formulierungen auf der Basis von Potentialen, die in Abschnitt 2.3 vorgestellt werden. Zu einer gültigen Problemstellung gehören zudem Randbedingungen, deren Einprägung über die jeweiligen Potentiale erfolgt. Die unterschiedlichen Arten der Modellierung der Begrenzung des betrachteten Gebietes werden in Abschnitt 2.4 erläutert.

Da nur in seltenen Fällen analytische Methoden zur Lösung des Systems von Differentialgleichungen in Frage kommen, wird auf numerische Verfahren zurückgegriffen. In Kapitel 3 erfolgt eine Aufstellung der im weiteren eingesetzten numerischen Ansätze, die auf einer Zerlegung des betrachteten Gebietes in kleine Teilvolumen basieren. Diese Übersicht umfasst im einzelnen:

- Die Methode der Finiten Integration
- Die Methode der Finiten Elemente
- Spektralelementverfahren sowie die Methode der spektralen Kollokation

Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Behandlung der im Rahmen der Methode der Finiten Elemente eingesetzten Approximation physikalischer Größen über Ansatzfunktionen mit einem kompakten Träger. Abschließend erfolgt eine kurze Betrachtung der zur Beschreibung zeitlich langsam veränderlicher Phänomene auf diskreter Basis eingesetzten Verfahren.

In Kapitel 4 werden die genannten numerischen Verfahren zur Simulation der elektromagnetischen Felder innerhalb des SIS-100-Magneten eingesetzt. Es handelt sich dabei um einen Dipolmagneten, der in mehrfacher Ausfertigung zur Führung der beschleunigten Teilchen auf einer Kreisbahn entlang des Synchrotrons SIS-100 vorgesehen ist. Nach der Vorstellung des zugrundeliegenden vereinfachten Modells in Abschnitt 4.1 erfolgt eine Beschreibung des verwendeten Simulationsverfahrens einschließlich der erforderlichen Modellierung der spezifischen Eigenschaften der beteiligten Materialien in Abschnitt 4.2. Den Hauptteil dieses Kapitels bildet Abschnitt 4.3 mit der Zusammenstellung der bei der Berechnung von Wirbelstromeffekten im SIS-100-Magneten unter Verwendung der verschiedenen Simulations- und Modellierungsmethoden erzielten Ergebnisse. Desweiteren wird in Abschnitt 4.4 eine Auswertung der magnetischen Flussdichte im Öffnungsbereich des Magneten anhand der Ergebnisse der numerischen Simulationen vorgenommen. Deren Homogenität ist maßgeblich für einen fehlerfreien Betrieb des Beschleunigerrings.

Kapitel 5 befasst sich mit der Konstruktion eines effizienten Diskretisierungsverfahrens unter besonderer Berücksichtigung räumlicher Symmetrien. Der Ausgangspunkt einer symmetriebasierten Reduktion des betrachteten Volumens wird in Abschnitt 5.1 dargelegt. Im folgenden Abschnitt 5.2 erfolgt die Herleitung eines hybriden Verfahrens, welches innerhalb von Symmetriebereichen die Vorteile der Modellierung über Finite Elemente mit den Vorzügen von Spektralelementen verbindet. Die Anwendbarkeit des entwickelten Verfahrens wird anhand der Simulation des Isolationsverhaltens eines Hochspannungstransformators sowie der magnetischen Eigenschaften des supraleitenden Dipolmagneten in Abschnitt 5.3 aufgezeigt.

2 Beschreibung elektromagnetischer Felder

2.1 Die Maxwellschen Gleichungen

Die fundamentalen Zusammenhänge der Wechselwirkung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern werden durch die Maxwellschen Gleichungen beschrieben. James Clerk Maxwell fasste im 19. Jahrhundert die bis zu diesem Zeitpunkt erzielten Erkenntnisse zusammen und führte eine geschlossene Theorie ein, die bis heute die Basis der Beschreibung elektromagnetischer Phänomene bildet. Die ursprüngliche Notation [1, 2] erfolgte in Differentialschreibweise und lautet unter der Annahme ruhender Medien unter Verwendung der heute üblichen Differentialoperatoren

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t), \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{J}(\vec{r}, t), \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \varrho(\vec{r}, t), \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.4)$$

Dabei bezeichnet \vec{E} die elektrische Feldstärke, \vec{D} die elektrische Flussdichte, \vec{H} die magnetische Feldstärke, \vec{B} die magnetische Flussdichte, \vec{J} die elektrische Stromdichte sowie ϱ die elektrische Raumladungsdichte. Die Gleichungen gelten für jeden Ortsvektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ und für alle Zeitpunkte $t \in \mathbb{R}_0^+$. Vervollständigt wird dieses System von Differentialgleichungen durch die fundamentalen Zusammenhänge zwischen den Feld- und Flussgrößen. Sie lauten, wiederum unter der Annahme ruhender Medien,

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \bar{\epsilon}(\vec{E}(\vec{r})) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}_e(\vec{r}, t), \quad (2.5)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \bar{\mu}(\vec{H}(\vec{r})) \vec{H}(\vec{r}, t) + \vec{B}_r(\vec{r}, t), \quad (2.6)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \bar{\sigma}(\vec{E}(\vec{r})) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{J}_e(\vec{r}, t), \quad (2.7)$$

wobei $\bar{\epsilon}$ die elektrische Permittivität, $\bar{\mu}$ die magnetische Permeabilität und $\bar{\sigma}$ die elektrische Leitfähigkeit beschreibt. Weiterhin bezeichnet \vec{P}_e die elektrische Polarisation, \vec{B}_r die magnetische Remanenz und \vec{J}_e eine eingeprägte, feldunabhängige Stromdichte. Die Materialkoeffizienten haben im allgemeinen tensoriellen Charakter, der mikroskopischen Ursprungs sein kann [3] oder durch spezielle Fertigungsverfahren entsteht. In vielen Fällen, beispielsweise bei niedriger Feldstärke und entsprechenden Werkstoffen, kann die Abhängigkeit des Materialparameters von der Feldstärke vernachlässigt werden. Unter diesen Umständen erfolgt eine näherungsweise Modellierung über einen konstanten Koeffizienten. Es gibt jedoch auch ein großes Anwendungsgebiet, insbesondere beim Einsatz ferromagnetischer Werkstoffe, in dem diese Vereinfachung nicht zulässig ist.

Zusätzlich zu dem beschriebenen Verhalten sind die Werte der Materialkoeffizienten mitunter stark temperaturabhängig. Da im Rahmen dieser Arbeit jedoch weder Temperaturänderungen noch deren Einfluss auf die elektromagnetischen Felder von Bedeutung sind, wird im folgenden nicht weiter auf diesen Parameter eingegangen. Dennoch müssen die für den relevanten Temperaturbereich gültigen Werte der Materialkoeffizienten anhand von Kennlinien ausgewertet und innerhalb der zugehörigen Materialgesetze verwendet werden.

Durch Einsetzen des Materialgesetzes in Gleichung (2.7) in das Ampèresche Gesetz in Gleichung (2.2) ergibt sich durch Divergenzbildung auf beiden Seiten zusammen mit Gleichung (2.3) die implizit in den Maxwell’schen Gleichungen enthaltene Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \left(\bar{\sigma}(\vec{E}(\vec{r})) \vec{E}(\vec{r}, t) \right) + \nabla \cdot \vec{J}_e(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.8)$$

Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen der Ladungsänderung und den Quellen der Stromdichte und somit den physikalischen Sachverhalt der Ladungserhaltung [4]. Dabei wurde an dieser Stelle in der Notation zugunsten der Übersichtlichkeit auf die Berücksichtigung der unter Umständen nichtlinearen Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der elektrischen Feldstärke verzichtet. Der feldabhängige Anteil der Stromdichte $\vec{J}_1(\vec{r}, t) = \bar{\sigma}(\vec{E}(\vec{r})) \vec{E}(\vec{r}, t)$ wird häufig als Leitungsstromdichte bezeichnet.

Eine äquivalente Darstellung der Gleichungen (2.1) bis (2.4) entsteht durch Integration über allgemeine Volumen und Flächen unter Anwendung der Integralsätze von Stokes und Gauß. Dazu wird im Fall der Gleichungen (2.1) und (2.2) über eine beliebige Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ integriert. Nach Anwendung des Integralsatzes von Stokes gehen die jeweiligen linken Seiten in Linienintegrale über die geschlossene Berandung ∂S der Fläche S über. Integriert wird dabei über Liniensegmente $d\vec{s}$. Für den Fall der Gleichungen (2.3) und (2.4) wird über ein Teilvolumen $V \subseteq \mathbb{R}^3$ integriert, wobei nun durch die Anwendung des Integralsatzes von Gauß die linken Seiten in Oberflächenintegrale über die geschlossene Berandung ∂V des Integrationsvolumens in Form von Flächensegmenten $d\vec{A}$ übergehen.

Somit lauten die Maxwell'schen Gleichungen in Integralform

$$\int_{\partial S} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A}, \quad (2.9)$$

$$\int_{\partial S} \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \int_S \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{J}(\vec{r}, t) \right) \cdot d\vec{A}, \quad (2.10)$$

$$\int_{\partial V} \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = \int_V \varrho(\vec{r}, t) dV, \quad (2.11)$$

$$\int_{\partial V} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = 0, \quad (2.12)$$

für alle Flächen $S \subset \mathbb{R}^3$ und Volumen $V \subseteq \mathbb{R}^3$ sowie $t \in \mathbb{R}_0^+$. Analog folgt für die Kontinuitätsgleichung (2.8) in integraler Schreibweise

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \varrho(\vec{r}, t) dV + \int_{\partial V} \left(\vec{\sigma}(\vec{E}(\vec{r})) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{J}_e(\vec{r}, t) \right) \cdot d\vec{A} = 0. \quad (2.13)$$

Die bereits definierten Materialbeziehungen gelten unverändert. Da die aufgeführten Darstellungen der Maxwell'schen Gleichungen in Differential- beziehungsweise Integralform wechselseitig ineinander überführbar sind, können beide gleichermaßen zur Beschreibung beliebiger elektromagnetischer Phänomene herangezogen werden.

Aus den Maxwell'schen Gleichungen in Integralform folgen unmittelbar Bedingungen für das Verhalten der elektromagnetischen Größen an Materialübergängen [5, 6]. An der Grenzfläche zwischen zwei Raumteilen 1 und 2 mit unterschiedlichen Permittivitäten ε_1 und ε_2 verhalten sich die Komponenten der elektrischen Feld- und Flussgrößen nach Anwendung der Gleichungen (2.9) und (2.11) auf eine den Materialübergang einschließende Fläche beziehungsweise ein entsprechendes Volumen gemäß

$$\vec{E}_2 \times \vec{n} - \vec{E}_1 \times \vec{n} = 0, \quad (2.14)$$

$$\vec{D}_2 \cdot \vec{n} - \vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \varrho_F. \quad (2.15)$$

Dabei beschreibt \vec{n} einen Vektor, der senkrecht auf dem Materialübergang steht und in Richtung des Raumteils 2 weist. In Abwesenheit einer Flächenladungsdichte ϱ_F ist die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte stetig an der Grenzfläche. Anderenfalls weist die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte einen Sprung um den Betrag der Flächenladungsdichte auf. Die tangentielle Komponente der elektrischen Feldstärke ist nach Gleichung (2.14) grundsätzlich stetig. Wird analog Gleichung (2.10) auf eine Fläche, die einen Übergang zwischen zwei Halbräumen mit unterschiedlichen Permeabilitäten μ_1 und

μ_2 abdeckt, angewandt, ergibt sich die Stetigkeitsbedingung für die magnetische Feldstärke. Zur Untersuchung des Verhaltens der magnetischen Flussdichte wird Gleichung (2.12) für ein entsprechendes Volumen ausgewertet. Damit ergeben sich die Stetigkeitsbeziehungen für die magnetischen Feld- und Flussgrößen zu

$$\vec{H}_2 \times \vec{n} - \vec{H}_1 \times \vec{n} = \vec{J}_F, \quad (2.16)$$

$$\vec{B}_2 \cdot \vec{n} - \vec{B}_1 \cdot \vec{n} = 0. \quad (2.17)$$

Die tangentielle Komponente der magnetischen Feldstärke an der Grenzfläche springt um den Betrag der eventuell vorhandenen Flächenstromdichte \vec{J}_F am Materialübergang, während die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte aufgrund der Nicht-Existenz magnetischer Ladungen gemäß Gleichung (2.12) grundsätzlich stetig bleibt. Im Fall eines Übergangs zwischen zwei Raumteilen unterschiedlicher Leitfähigkeiten σ_1 und σ_2 folgt aus der Kontinuitätsgleichung (2.13) nach [5] für die Stetigkeit der Normalkomponente der Stromdichte der Zusammenhang

$$\vec{J}_2 \cdot \vec{n} - \vec{J}_1 \cdot \vec{n} = -\nabla_F \cdot \vec{J}_F - \frac{\partial}{\partial t} \varrho_F. \quad (2.18)$$

Das Skalarprodukt mit dem Operator ∇_F auf der rechten Seite von Gleichung (2.18) entspricht der Bildung der sogenannten Oberflächendivergenz und charakterisiert somit die Quellen eines Oberflächenflusses [5, 7]. Anschaulich bedeutet dies, dass ein Unterschied in der Normalkomponente der elektrischen Stromdichte entweder durch eine Flächenstromdichte hervorgerufen wird, im zeitabhängigen Fall aus einer zeitlichen Veränderung der Flächenladungsdichte resultiert oder eine Kombination beider Szenarien gegeben ist. Liegt weder eine Flächenstromdichte noch eine zeitliche Änderung der Flächenladungsdichte vor, so ist die Normalkomponente der Stromdichte stetig an der Grenzfläche.

2.2 Klassifizierung elektromagnetischer Problemstellungen

Die im vorangegangenen Abschnitt vorgestellte Beschreibung elektromagnetischer Felderscheinungen ist zunächst in dieser Form auf allgemeine Problemstellungen anwendbar. In bestimmten Fällen sind jedoch Vereinfachungen zulässig, die einerseits zwar die Komplexität der Beschreibung reduzieren, jedoch auf der anderen Seite auch das physikalische Verhalten der Lösung entscheidend verändern.

Allgemein weisen die Lösungen der vollständigen Maxwellschen Gleichungen einen Wellencharakter auf [4]. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit $|\vec{v}|$ der Wellen hängt von den Ei-

genschaften des durchquerten Mediums gemäß

$$|\vec{v}| = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}} = c_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \quad (2.19)$$

ab. Dabei bezeichnet $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, wobei ε_r und μ_r die relativen Materialkoeffizienten des Mediums bezüglich der im Vakuum gültigen Werte ε_0 und μ_0 angeben. Im Fall einer inhomogenen räumlichen Materialverteilung kann über

$$|v_{\min}| = c_0 \frac{1}{\sqrt{\max_{\Omega} \varepsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{\max_{\Omega} \mu_r}} \leq \min_{\Omega} |\vec{v}| \quad (2.20)$$

eine grobe Abschätzung über die kleinste im betrachteten Volumen Ω vorkommende Ausbreitungsgeschwindigkeit getroffen werden. Unter der Annahme eines beliebigen Volumens mit der Raumdiagonalen der Länge l_{Ω} kann über

$$\tau_{\text{em}} = \frac{l_{\Omega}}{v_{\min}} \quad (2.21)$$

die **elektromagnetische Durchgangszeit** τ_{em} definiert werden, die angibt, wie lange eine elektromagnetische Welle höchstens benötigt, um das Gebiet zu durchqueren [7]. Die so definierte Größe kann nun zum Vergleich mit anderen Zeitkonstanten herangezogen werden, um Vereinfachungen ausgehend vom vollständigen Satz der Maxwellschen Gleichungen zu motivieren.

Eine isolierte Betrachtung der Quellen des elektrischen Feldes führt zu einer weiteren charakteristischen Zeitkonstante. In einem Gebiet mit einer bestimmten räumlichen Verteilung der Permittivität ε und einer überall von Null verschiedenen Leitfähigkeit σ lässt sich unter Verwendung von Gleichung (2.3) zusammen mit Gleichung (2.8) eine Differentialgleichung finden, die das Relaxationsverhalten freier Ladungen beschreibt. Daraus folgt die Definition der charakteristischen **Ladungsrelaxationszeit**

$$\tau_e = \frac{\varepsilon}{\sigma}. \quad (2.22)$$

Sie beschreibt die Zeitspanne, innerhalb derer ein stationärer Zustand nach einer anfangs herrschenden Ladungsverteilung im Raum erreicht wird. Eine ausführliche Herleitung der Zusammenhänge ist in [7] verfügbar. Für den Fall einer inhomogenen Materialverteilung kann nur eine Abschätzung des minimalen und maximalen Wertes für τ_e angegeben werden. Dabei muss die Untersuchung auf das Untergebiet $\Omega_{\sigma} \subseteq \Omega$ beschränkt werden, in dem die Leitfähigkeit von Null verschieden ist. Damit gilt für die Grenzen des Intervalls der möglichen Werte $[\tau_{e,\min}, \tau_{e,\max}]$ für die Ladungsrelaxationszeit

$$\tau_{e,\min} = \frac{\min_{\Omega} \varepsilon}{\max_{\Omega_{\sigma}} \sigma} \leq \min_{\Omega, \Omega_{\sigma}} \tau_e, \quad \tau_{e,\max} = \frac{\max_{\Omega} \varepsilon}{\min_{\Omega_{\sigma}} \sigma} \geq \max_{\Omega, \Omega_{\sigma}} \tau_e. \quad (2.23)$$

Werden analog die Quellen des magnetischen Feldes betrachtet, ergibt sich eine weitere Kenngröße, die zur Charakterisierung des zeitabhängigen Verhaltens herangezogen werden kann. In einem leitfähigen Gebiet mit einer beliebigen Verteilung der Permeabilität folgt für die *magnetische Diffusionszeit*

$$\tau_m = \sigma \mu l_\Omega^2 \quad (2.24)$$

unter Verwendung der oben eingeführten charakteristischen Länge l_Ω . Eine ausführliche Herleitung dieses Ergebnisses ist in [7] zu finden. Auch hier ist im Fall einer inhomogenen räumlichen Verteilung der Leitfähigkeit σ zu beachten, dass sich die Zeitkonstante τ_m nur auf ein bestimmtes Intervall eingrenzen lässt. Die Grenzen des entsprechenden Intervalls, wiederum unter Beschränkung auf Gebiete Ω_σ , in denen die Leitfähigkeit von Null verschieden ist, lauten

$$\tau_{m,\min} = l_\Omega^2 \min_{\Omega_\sigma} \sigma \min_{\Omega} \mu \leq \min_{\Omega, \Omega_\sigma} \tau_m, \quad \tau_{m,\max} = l_\Omega^2 \max_{\Omega_\sigma} \sigma \max_{\Omega} \mu \leq \min_{\Omega, \Omega_\sigma} \tau_m. \quad (2.25)$$

Für die gewünschte Klassifizierung elektromagnetischer Feldprobleme ist zunächst eine Unterteilung in dissipative und nicht dissipative Probleme erforderlich. In Abwesenheit einer elektrischen Leitfähigkeit σ können keine Diffusionsprozesse stattfinden und es existiert keine sinnvolle Definition für die Zeitkonstanten τ_e und τ_m . Insofern kann das zeitliche Verhalten des Systems nur durch die elektromagnetische Durchgangszeit τ_{em} charakterisiert werden. Liegt die charakteristische Zeitkonstante der Anregung τ weit oberhalb von τ_{em} , so kann eine separate statische Approximation der dann voneinander entkoppelten elektrischen oder magnetischen Phänomene erfolgen. Die entsprechend diesem Fall durch Vernachlässigung der zeitlichen Ableitungen modifizierten Maxwellschen Gleichungen lauten für die *Elektrostatik*

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad (2.26)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}). \quad (2.27)$$

Die nun von den übrigen Gleichungen entkoppelten magnetischen Felder werden in der statischen Näherung, der *Magnetostatik*, durch

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}), \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (2.29)$$

beschrieben. Liegt hingegen die charakteristische Zeitkonstante der Anregung τ in der gleichen Größenordnung wie τ_{em} , so muss der vollständige Satz der Maxwellschen Gleichungen gemäß der Gleichungen (2.1) bis (2.4) berücksichtigt werden.

Als zweite Klasse zu betrachtender Problemstellungen ergeben sich dissipationsbehaftete Anordnungen. Hier können verschiedene Situationen entstehen, wobei die Art der möglicherweise anzuwendenden Näherung bestimmt wird durch den Geometriefaktor l_Ω , die Zeitkonstante der Anregung τ sowie die Größe der Materialparameter ε , μ und σ . Über die oben eingeführten charakteristischen Zeitkonstanten besteht die Möglichkeit, Anhaltspunkte für die Anwendung entsprechender Vereinfachungen zu finden. Übersichtliche graphische Darstellungen der Zusammenhänge zwischen den Zeitkonstanten sind in [8] und [9] zu finden. Die Ergebnisse und die sich daraus ergebenden Sätze von Gleichungen werden im folgenden kurz zusammengefasst. Für den Fall $\tau_{e,\min} > \tau \gg \tau_{em}$ ist die **elektroquasistatische** Näherung anwendbar [10]. Dabei wird die im Induktionsgesetz (2.1) vorkommende zeitliche Ableitung der magnetischen Flussdichte vernachlässigt. Somit lauten die für diesen Fall relevanten Gleichungen

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \left(\vec{\sigma}(\vec{E}(\vec{r})) \vec{E}(\vec{r}, t) \right) + \nabla \cdot \vec{J}_e(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \varrho(\vec{r}, t). \quad (2.32)$$

Welleneffekte werden in diesem Gleichungssatz nicht modelliert. Der entstehende Modellierungsfehler ist klein, wenn die auftretenden Erscheinungen im wesentlichen durch die Ladungsrelaxation bestimmt sind. Gilt hingegen $\tau > \tau_{e,\max} \gg \tau_{em}$, so kann wiederum die elektrostatische Approximation eingesetzt werden. Im Fall $\tau < \tau_{em}$ muss auch hier der vollständige Satz der Maxwellschen Gleichungen gemäß der Gleichungen (2.1) bis (2.4) zur Beschreibung herangezogen werden. Eine weitere Klasse von Problemstellungen bilden Systeme, in denen induktive Diffusionsprozesse maßgeblich sind. Dies ist insbesondere gegeben wenn $\tau_{m,\min} > \tau \gg \tau_{em}$ gilt. In diesem Fall kann die **magnetoquasistatische** Approximation eingesetzt werden um das System der Maxwellschen Gleichungen zu vereinfachen. Unter Voraussetzung dieser Näherung lauten die relevanten Gleichungen nach Vernachlässigung der zeitlichen Änderung der elektrischen Flussdichte

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t), \quad (2.33)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{\sigma}(\vec{E}(\vec{r})) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{J}_e(\vec{r}, t), \quad (2.34)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.35)$$

Hierbei wird die Rückwirkung der gemäß des Induktionsgesetzes erzeugten elektrischen Feldstärke auf die magnetische Flussdichte über die Verschiebungsstromdichte $\partial \vec{D}(\vec{r}, t) / \partial t$ nicht modelliert. Somit treten bei der Verwendung dieser Approximation wiederum keine

Wellenerscheinungen auf. Eine mathematische Untermauerung der Zulässigkeit der approximativen Modellierung ist in [11] gegeben. Das magnetoquasistatische System kann für $\tau > \tau_{m,\max} \gg \tau_{em}$ durch ein magnetostatisches System gemäß (2.28)-(2.29) angenähert werden. Falls $\tau < \tau_{em}$ gilt, sind die genannten Vereinfachungen nicht zulässig und in der Folge muss das vollständige System der Maxwell'schen Gleichungen betrachtet werden.

Zusätzlich zu den bereits angesprochenen Vereinfachungen der Maxwell'schen Gleichungen auf der Basis der Zeitskala der ablaufenden Vorgänge wird häufig eine weitere Approximation, insbesondere im Fall schnell veränderlicher Felder bei $\tau < \tau_{em}$, getroffen. In diesem Anwendungsbereich treten meist Materialien sehr hoher Leitfähigkeit auf. Diese werden entweder als ideal elektrisch leitend angenommen oder, aufgrund der geringen Transparenz für elektromagnetische Felder, über Impedanzrandbedingungen modelliert. In beiden Fällen wird jedoch die Rückwirkung der erzeugten Verluste auf die Lösung vernachlässigt. Insofern stellt auch die Betrachtung der Wellengleichung ohne Berücksichtigung des dämpfenden Leitfähigkeitsterms eine, wenngleich weithin zulässige, Abstraktion von dem vollständigen Satz der Maxwell'schen Gleichungen dar.

Anzumerken ist, dass eine Qualifizierung einzelner Problemstellungen in eine der vorgestellten Klassen schon von Natur aus nicht exakt möglich ist. Grundsätzlich ändern die interessierende Zeitskala, die vorkommende Materie oder die Abmessungen der betrachteten Objekte nichts am grundlegenden Wellencharakter der Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen. Darüber hinaus basieren die Herleitungen der zur Klassifizierung herangezogenen Zeitkonstanten bereits auf dem möglichen Ergebnis, elektrische und magnetische Phänomene getrennt betrachten zu können. Dennoch ist es sinnvoll, mithilfe der charakteristischen Zeitkonstanten eine Unterteilung in die genannten Bereiche vorzunehmen. Dabei muss jedoch der zusätzlich eingeführte systematische Modellierungsfehler in Kauf genommen werden. Für praktische Problemstellungen existiert jedoch eine Vielzahl weiterer Fehlerquellen und Unsicherheiten, deren Größe den genannten Modellierungsfehler idealerweise weit übersteigt. In diesen Fällen sind die angesprochenen Vereinfachungen zulässig, da die Genauigkeit der Lösung nicht weiter beeinträchtigt wird.

2.3 Statische und quasistatische Formulierungen

Für die einzelnen, im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Bereiche, existieren verschiedene Formulierungen, die meist mit der Einführung zusätzlicher Hilfsgrößen, welche in diesem Kontext zunächst keine unmittelbare physikalische Bedeutung aufweisen, einhergehen. Unter Verwendung dieser Hilfsgrößen wird die im Rahmen der zugehörigen Approximation relevante Untermenge der Maxwell'schen Gleichungen zu einer Differential-

Vektorfeld \vec{K}	wirbelfrei	divergenzfrei
\vec{K}	totales Skalarpotential ξ $\vec{K} = -\nabla\xi$	totales Vektorpotential \vec{L} $\vec{K} = \nabla \times \vec{L}$
$\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2$	reduziertes Skalarpotential ξ_r $\vec{K} = \vec{K}_1 - \nabla\xi_r$	reduziertes Vektorpotential \vec{L}_r $\vec{K} = \vec{K}_1 + \nabla \times \vec{L}_r$

Tabelle 2.1: Anhand der gegebenen Wirbel- oder Divergenzfreiheit des darzustellenden Vektorfeldes \vec{K} definierte Potentiale. Dabei bieten die totalen Potentiale ξ, \vec{L} eine vollständige Darstellung des zugehörigen Vektorfeldes, während die mit dem Index r gekennzeichneten reduzierten Potentiale ξ_r, \vec{L}_r nur für den Anteil \vec{K}_2 innerhalb der Zerlegung $\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2$ gelten.

gleichung zusammengefasst. Die Einführung von sogenannten Potentialen als Hilfsgrößen basiert auf den folgenden Eigenschaften von Vektorfeldern:

- Ein Vektorfeld \vec{K} wird als **wirbelfrei** bezeichnet, falls $\nabla \times \vec{K} = 0$ gilt. Wirbelfreie Vektorfelder können durch den Gradienten einer skalaren Funktion ξ beschrieben werden. Unter dieser Voraussetzung gilt somit $\vec{K} = \nabla\xi$.
- Erfüllt ein Vektorfeld \vec{K} hingegen die Bedingung $\nabla \cdot \vec{K} = 0$, so bezeichnet man \vec{K} als **divergenzfrei**. In diesem Fall kann \vec{K} durch die Rotation eines beliebigen Vektorfeldes \vec{L} über $\vec{K} = \nabla \times \vec{L}$ ausgedrückt werden.

Abhängig von der jeweiligen statischen oder quasistatischen Approximation können somit entsprechende Potentiale für einzelne Feldgrößen eingeführt werden. Treten die obigen homogenen Beziehungen innerhalb der gewählten Approximation der Maxwellschen Gleichungen nicht unmittelbar auf, kann eine partielle Helmholtz-Zerlegung nach $\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2$ in die Anteile \vec{K}_1 und \vec{K}_2 vorgenommen werden. Dabei soll \vec{K}_2 eine der homogenen Bedingungen $\nabla \times \vec{K}_2 = 0$ oder $\nabla \cdot \vec{K}_2 = 0$ erfüllen. Damit ist die Einführung des entsprechenden Potentials für einen reduzierten Anteil des eigentlichen Vektorfeldes möglich. Die verschiedenen möglichen Konstellationen sind der Tabelle 2.1 zusammen mit den in der Literatur gebräuchlichen Bezeichnungen zu entnehmen. Im allgemeinen sind die auf diese Weise eingeführten Potentiale jedoch nicht eindeutig bestimmt. So kann im Fall skalarer Potentiale ξ stets eine Konstante C_1 addiert werden ohne eine Änderung des Vektorfeldes \vec{K} zu verursachen. Bei vektoriellen Potentialen \vec{L} führt die Addition des Gradienten einer skalaren Funktion χ aufgrund der Wirbelfreiheit von Gradientenfeldern zu einem unveränderten Ergebnis für das darzustellende Vektorfeld \vec{K} . Zusammengefasst resultiert daraus die als Eichfreiheit bezeichnete Unbestimmtheit der Potentialdarstellung für die Maxwellschen Gleichungen. Die verwendeten Eichungen werden in den Abschnitten zu den verschie-

denen Formulierungen explizit aufgeführt. Anzumerken ist, dass eine explizite Eichung nicht immer erforderlich sein muss, da die physikalisch relevanten und messbaren Größen durch die Potentiale durchaus eindeutig bestimmt sind. Eine weitere Variante stellen hybride Formulierungen dar, welche das betrachtete Gebiet in Untergebiete unterteilen, um jeweils unabhängige Potentialdarstellungen zu finden. Bei der Verwendung dieser Möglichkeit müssen die Teilgebiete unter Verwendung der entsprechenden Stetigkeitsbedingungen gekoppelt werden, um die Eindeutigkeit der Feldlösung zu garantieren. Aus der Menge an möglichen Formulierungen werden im folgenden nur diejenigen vorgestellt, die im Rahmen der Arbeit eingesetzt werden. Desweiteren wird in der Notation auf die explizite Darstellung der räumlichen und gegebenenfalls zeitlichen Abhängigkeit der Feld- und Flussgrößen zugunsten der Übersichtlichkeit verzichtet.

Elektrostatik

Da die elektrische Feldstärke \vec{E} im elektrostatischen Fall die Bedingung der Wirbelfreiheit uneingeschränkt im gesamten Raum erfüllt, kann das *(totale) elektrische Skalarpotential* ϕ eingeführt werden gemäß

$$\vec{E} = -\nabla\phi'. \quad (2.36)$$

Dabei ist die skalare Funktion $\phi' = \phi + C_1$ nur bis auf die additive Konstante C_1 eindeutig bestimmt. Mit dieser Definition gilt (2.26) unabhängig vom Ort und von der Wahl der Funktion ϕ . Einsetzen von (2.36) in (2.27) unter Verwendung der Materialbeziehung (2.5) liefert die Poisson-Gleichung

$$-\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi') = \varrho \quad (2.37)$$

für das elektrische Skalarpotential. Zur eindeutigen Bestimmung von ϕ' muß ein Bezugspotential an einem beliebigen Ort als Wert der Konstanten C_1 gewählt werden. Für diese Art von Problemstellungen sind bei vergleichsweise einfachen Anordnungen analytische Lösungsverfahren, unter anderen die Spiegelungsmethode oder der Separationsansatz anwendbar [4].

Elektroquasistatik

Im Fall der Zulässigkeit der elektroquasistatischen Näherung ist die Lösung der Kontinuitätsgleichung (2.31) maßgeblich zur Beschreibung der elektromagnetischen Felder. Analog zur Elektrostatik kann auch hier die Wirbelfreiheit der elektrischen Feldstärke (2.30) zur Definition des (totalen) elektrischen Skalarpotentials herangezogen werden. Nach Elimination der Raumladungsdichte ϱ ergibt sich die Differentialgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) - \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0. \quad (2.38)$$

Sie beschreibt elektrische Diffusionsvorgänge und ist unter den im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Bedingungen anwendbar.

Stationäres Strömungsfeld

Eine weitere Klasse statischer Problemstellungen folgt aus dem Grenzfall $\lim \partial/\partial t \rightarrow 0$, in welchem die zeitliche Änderung der Ladungsverteilung zu vernachlässigen ist. Unter Bildung des Grenzwertes geht Gleichung (2.38) in die Form

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (2.39)$$

über, die eine starke Ähnlichkeit mit der elektrostatischen Formulierung (2.37) im ladungsfreien Fall aufweist. Dementsprechend können dieselben Lösungsmethoden wie im elektrostatischen Fall eingesetzt werden. Gleichung (2.39) charakterisiert die stationäre Verteilung der Stromdichte in einem leitfähigen Medium. Die Herleitung dieser Formulierung kann auch über die unmittelbare Betrachtung der Kontinuitätsgleichung im statischen Fall in Verbindung mit der Bedingung der Wirbelfreiheit der elektrischen Feldstärke erfolgen.

Magnetostatik

Im Fall der magnetostatischen Approximation ist die Einführung eines Skalarpotentials analog zur Elektrostatik zunächst nicht möglich, da die magnetische Feldstärke durch die Stromdichteverteilung \vec{J} auf der rechten Seite von Gleichung (2.28) bestimmt wird und somit nicht wirbelfrei ist. Daher erfolgt eine partielle Helmholtz-Zerlegung der magnetischen Feldstärke \vec{H} gemäß

$$\vec{H} = \vec{H}_s + \vec{H}_w \quad (2.40)$$

in einen wirbelbehafteten Teil \vec{H}_s und einen wirbelfreien Anteil \vec{H}_w [12]. So kann \vec{H}_w als Gradient des **reduzierten magnetischen Skalarpotentials** ψ_m dargestellt werden [12, 13]. Da hier das Potential lediglich als Hilfsgröße fungiert und zudem bei der Bestimmung der magnetischen Feldstärke immer in Form seines Gradienten auftritt, wird auf die Einbeziehung einer additiven Konstante verzichtet. Somit gilt

$$\vec{H} = \vec{H}_s - \nabla \psi_m. \quad (2.41)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (2.29) unter Verwendung der Materialbeziehung (2.6) folgt mit

$$-\nabla \cdot (\mu \nabla \psi_m) = -\nabla \cdot (\mu \vec{H}_s) \quad (2.42)$$

die Poisson-Gleichung für das reduzierte magnetische Skalarpotential. Im Gegensatz zur Elektrostatik ist jedoch die rechte Seite zunächst unbekannt und muß aus der Verteilung der Stromdichte \vec{J} bestimmt werden. Zu diesem Zweck existieren verschiedene Ansätze. So kann mittels des Gesetzes von Biot-Savart [4] eine Darstellung für das Hilfsfeld \vec{H}_s gefunden werden. Dabei ist es nicht erforderlich, die räumliche Verteilung der Permeabilität

zu berücksichtigen. Ein für den freien Raum gültiges Ergebnis ist hier ausreichend, da die Wirkung des permeablen Materials durch die Lösung von Gleichung (2.42) bestimmt wird [14]. Die resultierende magnetische Feldstärke folgt aus Gleichung (2.41). Bei dieser Auswertung können jedoch in der Praxis, insbesondere in Gebieten hoher Permeabilität, numerische Probleme auftreten, falls die beiden voneinander zu subtrahierenden Anteile in derselben Größenordnung liegen. Dieses Problem kann bei der Anwendung eines numerischen Verfahrens durch eine Modifikation der Iteration zur Lösung des resultierenden Gleichungssystems oder durch eine Skalierung mit dem Wert der relativen Permeabilität gelöst werden.

Eine weitere Möglichkeit zur Umgehung des genannten numerischen Problems besteht in der Zerlegung in Teilgebiete in Verbindung mit der Einführung einer hybriden Formulierung. In Gebieten mit verschwindender Stromdichte wird das **totale magnetische Skalarpotential** ϕ_m angesetzt, da die magnetische Feldstärke nach Voraussetzung wirbelfrei ist. In den übrigen Gebieten kommt das reduzierte magnetische Skalarpotential ψ_m zum Einsatz. An den Grenzflächen erfolgt eine Kopplung unter Verwendung der Stetigkeitsbeziehungen (2.16) und (2.17) für die Feld- und Flussgrößen [13]. Bei der Verwendung dieser Formulierung treten jedoch in Gegenwart nicht einfach zusammenhängender Gebiete topologische Probleme auf, welche die Einführung von Schnitten erforderlich machen, um die Wohldefiniertheit der Potentiale zu sichern [15].

Unter Ausnutzung der Quellenfreiheit der magnetischen Flussdichte über die Definition eines entsprechenden Vektorpotentials entsteht eine weitere alternative Formulierung für magnetostatische Problemstellungen. Im gesamten betrachteten Raum kann das **totale magnetische Vektorpotential** \vec{A} eingeführt werden. Die magnetische Flussdichte wird damit durch

$$\vec{B} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla \xi) \quad (2.43)$$

unter Berücksichtigung der Wirbelfreiheit von Gradientenfeldern dargestellt. Die Wahl der skalaren Funktion ξ hat keinen Einfluss auf die magnetische Flussdichte. Sie kann stets so bestimmt werden, dass die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = -\Delta \xi = 0$ gilt. Damit ergibt sich die Differentialgleichung in dieser Formulierung zu

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{J}_e. \quad (2.44)$$

Nur für den Fall einer homogenen Verteilung der Permeabilität vereinfacht sich Gleichung (2.44) aufgrund der Coulomb-Eichung unmittelbar zu einem entkoppelten System dreier Poisson-Gleichungen in den Komponenten des magnetischen Vektorpotentials [16, 17].

Alle beschriebenen Formulierungen bieten eine exakte Erfüllung der Maxwellschen Gleichungen in der magnetostatischen Näherung unter Voraussetzung der Gültigkeit derselben

	Skalarpotential	Vektorpotential
elektrisches	ϕ	\vec{T}
magnetisches (total, reduziert)	ϕ_m, ψ_m	\vec{A}, \vec{A}_r

Tabelle 2.2: *Verwendete Formelzeichen für die unterschiedlichen totalen und reduzierten Potentiale innerhalb der elektrischen und magnetischen Formulierungen in der Magnetoquasistatik.*

hinsichtlich der weiter oben definierten charakteristischen Zeitkonstanten des betrachteten Systems. Die Auswahl einer spezifischen Formulierung kann daher anwendungsorientiert erfolgen.

Magnetoquasistatik

Für die Maxwellschen Gleichungen in der magnetoquasistatischen Approximation existiert eine Vielzahl verschiedener Formulierungen. Gemeinsam ist diesen, wie schon im Fall der übrigen möglichen Approximationen, die Einführung von Potentialgrößen, zuweilen unter Aufteilung des betrachteten Gebietes in Untergebiete mit verschiedenen Eigenschaften. Dabei kommen sowohl elektrische wie auch magnetische Potentiale zum Einsatz, deren verwendete Formelzeichen in Tabelle 2.2 aufgelistet sind. Das totale magnetische Vektorpotential ist zunächst nicht mehr allein ausreichend zur Erfüllung der in der magnetoquasistatischen Näherung relevanten Teilmenge der Maxwellschen Gleichungen. Dennoch wird Gleichung (2.43) wiederum genutzt, um die Quellenfreiheit der magnetischen Flussdichte zu modellieren. Durch Einsetzen in Gleichung (2.33) folgt jedoch

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0 \quad (2.45)$$

und damit die Notwendigkeit der Einführung des elektrischen Skalarpotentials ϕ . Daher gilt für die elektrische Feldstärke im magnetoquasistatischen Fall

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \nabla \phi. \quad (2.46)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (2.34) ergibt sich die Differentialgleichung für die Magnetoquasistatik unter Verwendung des (totalen) magnetischen Vektorpotentials und des (totalen) elektrischen Skalarpotentials in der (\vec{A}, ϕ) -Formulierung

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + \sigma \nabla \phi = \vec{J}_e. \quad (2.47)$$

Diese Darstellung wird in der Literatur häufig auch als (\vec{A}, V) -Formulierung bezeichnet, wobei V das elektrische Skalarpotential symbolisiert [18]. Um die Unbestimmtheit der Gleichung einzuschränken, wird eine Eichung für das magnetische Vektorpotential vorgenommen. Dazu kann zum einen die in der Magnetostatik eingeführte Coulomb-Eichung verwendet werden. Eine andere Möglichkeit stellt die in der Literatur zu Wirbelstromproblemen häufig als Lorenz-Eichung bezeichnete Form

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\sigma\phi \quad (2.48)$$

dar [19]. Diese Bezeichnung ist jedoch nicht korrekt, da die vorliegende Form der Eichung lediglich an die Lorenz-Eichung für den vollständigen Satz der Maxwellschen Gleichungen angelehnt ist [20]. Zudem entspricht sie nicht dem quasistatischen Grenzfall der ursprünglichen Lorenz-Eichung [21]. Die Berücksichtigung von Gleichung (2.48) führt zu einer Entkopplung von Gleichung (2.47) in jeweils eine Gleichung für das magnetische Vektorpotential und das elektrische Skalarpotential, die getrennt voneinander gelöst werden können.

Eine weitere mögliche Formulierung entsteht mit der Einführung des **modifizierten magnetischen Vektorpotentials** \vec{A}^* unter Ausnutzung der in Gleichung (2.43) ersichtlichen Eichfreiheit als

$$\vec{A}^* = \vec{A} + \int_0^t \nabla\phi \, dt'. \quad (2.49)$$

Mithilfe dieser, einer Eichung ähnlichen, Transformation wird das elektrische Skalarpotential aus Gleichung (2.47) eliminiert [22]. Die resultierende Gleichung lautet somit

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}^* \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^* = \vec{J}_e. \quad (2.50)$$

Sie ist in dieser Form zunächst ungeeicht, erfüllt jedoch implizit eine modifizierte Coulomb-Eichung $\nabla \cdot (\sigma \vec{A}^*) = 0$ in leitfähigen Gebieten unter der Voraussetzung der Divergenzfreiheit der Stromdichte \vec{J}_e [22].

Die bisher beschriebenen Ansätze werden gemeinhin als elektrische Formulierungen bezeichnet, da die elektrische Feldstärke gemäß Gleichung (2.46) direkt aus den eingeführten Potentialen hervorgeht. Eine weitere Klasse magnetoquasistatischer Formulierungen erschließt sich über die Einführung des elektrischen Vektorpotentials \vec{T} auf der Basis der Kontinuitätsgleichung (2.8) unter Vernachlässigung zeitlicher Ladungsänderungen als

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{T}. \quad (2.51)$$

Diese werden als magnetische Formulierungen bezeichnet, da die magnetische Feldstärke in Analogie zu Gleichung (2.46) über

$$\vec{H} = \vec{T} - \nabla\phi_m \quad (2.52)$$

Bezeichnung	elektrische Formulierung	magnetische Formulierung
Potentiale	\vec{A}, ϕ	\vec{T}, ϕ_m
Vektorpotential	$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$	$\vec{J} = \nabla \times \vec{T}$
Skalarpotential	$-\nabla \phi = \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$	$-\nabla \phi_m = \vec{H} - \vec{T}$
Feldstärke	$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \nabla \phi$	$\vec{H} = \vec{T} - \nabla \phi_m$
Gleichung 1	$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) + \sigma \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + \nabla \phi \right) = \vec{J}_e$	$\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{T} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{T} - \nabla \phi_m \right) = 0$
Gleichung 2	$\nabla \cdot \left(\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) + \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0$	$\nabla \cdot (\mu \vec{T}) - \nabla \cdot (\mu \nabla \phi_m) = 0$
„Lorenz“-Eichung	$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu \sigma \phi$	$\nabla \cdot \vec{T} = \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \phi_m$
Modifikation	$\vec{A}^* = \vec{A} + \int_0^t \nabla \phi \, dt'$	$\vec{T}^* = \vec{T} - \nabla \phi_m = \vec{H}^*$

Tabelle 2.3: Gegenüberstellung der elektrischen und magnetischen Formulierungen innerhalb der Magnetoquasistatik hinsichtlich der skalaren und vektoriellen Potentiale sowie der zugehörigen Eichungen.

aus dem *(totalen) elektrischen Vektorpotential* und dem totalen magnetischen Skalarpotential hervorgeht [23]. Neben der daraus herzuleitenden (\vec{T}, ϕ_m) -Formulierung, die in der Literatur meist als (\vec{T}, Ω) -Formulierung bezeichnet wird, lässt sich auch hier eine modifizierte Variante unter Elimination des magnetischen Skalarpotentials finden. Dabei geht das elektrische Vektorpotential in die magnetische Feldstärke über, da durch die Voraussetzung $\nabla \phi_m = 0$ neben der Rotation auch die Divergenz von \vec{T} und \vec{H} identisch sind [24]. Die entsprechenden Analogien zwischen elektrischen und magnetischen Formulierungen sind in Tabelle 2.3 aufgeführt.

Beide Klassen von Formulierungen beschreiben die zugrundeliegende Untermenge der Maxwell'schen Gleichungen äquivalent. Je nach Anwendungsgebiet erweist sich unter Umständen eine Variante als vorteilhafter. Mögliche Kriterien sind die Modellierbarkeit von eingepägten Strömen, externen Feldern oder Permanentmagneten. Gemeinsam ist beiden Typen von Formulierungen die Schwierigkeit im Fall des Auftretens von Gebieten, in welchen die Leitfähigkeit verschwindet. Diese manifestieren sich jedoch auf unterschiedliche Weise. Während bei der magnetischen Formulierung, wie bereits im statischen Fall, topologische Probleme auftreten können, entstehen bei elektrischen Formulierungen Schwierigkeiten bei der Eichung der nicht leitfähigen Regionen. Weiterhin muss bei der vorgestellten magnetischen Formulierung unter allen Umständen eine Unterteilung hinsichtlich leitfähiger

Bezeichnung	Beschreibung	Literatur
(\vec{A}, ϕ)	vektorieller und skalarer Ansatz im gesamten Gebiet	[26]
$(\vec{A}, \phi - \vec{A})$	skalarer Ansatz im nicht leitfähigen Gebiet	[27]
(\vec{A}^*)	vektorieller Ansatz im gesamten Gebiet	[22]
$(\vec{A}, \phi - \psi_m)$	getrennte Modellierung von Wirbel- und Anregungsstrom	[28]
$(\vec{A}, \phi - \phi_m)$	magnetisches Skalarpotential im nicht leitfähigen Gebiet	[29]
(\vec{T}, ϕ_m)	magnetische Formulierung dual zu (\vec{A}, ϕ)	[30]
$(\vec{T}, \phi_m - \phi_m)$	Reduktion auf Skalarpotential im nicht leitfähigen Gebiet	[31]
$(\vec{H}, \psi_m - \psi_m)$	Wirbelstrommodellierung über magnetische Feldstärke	[25]

Tabelle 2.4: Auswahl gebräuchlicher hybrider sowie globaler Formulierungen für Problemstellungen innerhalb der Wirbelstromberechnung.

und nicht leitfähiger Gebiete unternommen werden, da der Term $\nabla \times (\frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{T})$ in letzteren Regionen nicht definiert ist.

Alle bisher genannten magnetoquasistatischen Formulierungen basieren auf den totalen Potentialgrößen. Diese sind daher, unter der oben getroffenen Einschränkung, zunächst im gesamten betrachteten Gebiet definiert. In bestimmten Fällen ist es jedoch möglich, das zu untersuchende Gebiet anhand verschiedener Kriterien so zu unterteilen, dass in Teilbereichen weiter vereinfachte Ansätze verwendet werden können. Auf diese Weise entsteht eine sehr große Zahl verschiedener Hybridformulierungen. Neben den bisher betrachteten Potentialformulierungen existieren auch Beschreibungen unter Verwendung einzelner Feldgrößen, die sich als Spezialfälle aus den Potentialformulierungen ergeben [24].

In der Notation für hybride Formulierungen werden die verwendeten Ansätze im leitfähigen Gebiet an erster Stelle genannt und durch einen Bindestrich von den Ansätzen im restlichen Gebiet getrennt. Als Beispiel sei die $(\vec{H}, \psi_m - \psi_m)$ -Formulierung unter Verwendung des reduzierten magnetischen Skalarpotentials ψ_m in Verbindung mit der magnetischen Feldstärke \vec{H} als Unbekannte innerhalb des leitfähigen Materials genannt. Das reduzierte magnetische Skalarpotential ist allein nicht ausreichend, um den Effekt der Leitungsstromdichte \vec{J}_l zu modellieren, da die rechte Seite von Gleichung (2.34) nicht im voraus bekannt ist und zur Bestimmung des Hilfsfeldes \vec{H}_s herangezogen werden kann. Wird jedoch die zu den Wirbelströmen im leitfähigen Gebiet gehörige magnetische Feldstärke als zusätzliche Variable eingeführt, kann die Problemstellung zusammen mit dem reduzierten magnetischen Skalarpotential gelöst werden [25]. Bei allen hybriden Formulierungen müssen die eingeführten Potentiale aus den Feld- und Flussgrößen abgeleitete Stetigkeitsbedingungen am Übergang zwischen den entsprechend unterteilten Gebieten erfüllen. In Tabelle 2.4 sind

die bereits beschriebenen Formulierungen zusammen mit einigen weiteren Möglichkeiten der Kombination der einzelnen Potentiale angegeben. Bereits seit geraumer Zeit werden die Vor- und Nachteile der verschiedenen Formulierungen untersucht und gegeneinander abgewogen, meist auf der Basis einer numerischen Lösung des zugrundeliegenden Systems von Differentialgleichungen [32, 33, 34]. Auf einen solchen Vergleich wird daher an dieser Stelle verzichtet. Aufgrund der vielseitigen Anwendbarkeit und Kompaktheit der zugehörigen Formulierung wird im folgenden stets das modifizierte magnetische Vektorpotential \vec{A}^* zur Lösung magnetoquasistatischer Problemstellungen eingesetzt. So erfolgt die Beschreibung mittels eines einzelnen Potentials ohne die Notwendigkeit der Unterscheidung nach leitfähigen, nicht leitfähigen sowie einen eingepprägten Strom enthaltenden Gebieten.

2.4 Modellierung des Problemvolumens

Die Maxwellschen Gleichungen und ihre äquivalenten Darstellungen über verschiedene Potentiale beschreiben zunächst die Wechselwirkungen zwischen elektrischen und magnetischen Feldern im gesamten Raum. Im allgemeinen führt dies im Grenzfall zu einem unendlich ausgedehnten Betrachtungsvolumen. Um Anforderungen zur Lösbarkeit der beschriebenen Problemstellungen zu formulieren, wird der Typ der entsprechenden Differentialgleichung untersucht. Im Fall der statischen Formulierungen handelt es sich um *elliptische* partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung [35]. Diese werden als Randwertprobleme bezeichnet, da durch die Vorgabe entsprechender Bedingungen am Rand eines zu betrachtenden Gebietes die Existenz einer eindeutigen Lösung gesichert ist [36]. Für den Grenzfall des unendlich ausgedehnten Raumes bedeutet dies die Vorgabe von Werten für Potentiale beziehungsweise Felder im Unendlichen. Im Gegensatz dazu beschreiben die quasistatischen Formulierungen Diffusionsprozesse elektrischer oder magnetischer Natur und stellen *parabolische* partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar. Zusätzlich zu den bereits erwähnten Randwerten müssen in diesem Fall auch zeitliche Anfangswerte festgelegt werden. Daher wird diese Art von Problemstellung auch als Anfangs-/Randwertaufgabe bezeichnet [36]. Randbedingungen für die betrachteten Differentialgleichungen folgen aus physikalischen Überlegungen. Bei der Lösung der Differentialgleichungen auftretende, frei wählbare Konstanten werden so bestimmt, dass alle Felder endlich bleiben sowie mit der Entfernung von ihren Quellen zu Null abklingen. Diese Vorgehensweise folgt aus dem Prinzip der Energieerhaltung.

In zahlreichen praktischen Anwendungsfällen in der Quasistatik bietet sich die Beschränkung des betrachteten Volumens auf einen Teilbereich des gesamten Raumes an. Dabei muss die Beschränkung des Gebietes so erfolgen, dass der resultierende Modellierungsfeh-

Bezeichnung	Vorschrift	Beschreibung
Dirichlet	$u(a) = \alpha$	Vorgabe eines festen Wertes für u
Neumann	$\vec{M}_v u(a) = \beta$	Vorgabe der räumlichen Ableitung von u
Robin	$k_1 u(a) + k_2 \vec{M}_v u(a) = \gamma$	Linearkombination Dirichlet und Neumann
periodisch	$u(a) = k_3 u(b)$ $\vec{M}_v u(a) = k_3 \vec{M}_v u(b)$	Feste Relation zwischen separierten Rändern

Tabelle 2.5: Randbedingungen für elliptische Differentialgleichungen im Intervall $[a, b]$ mit beliebig wählbaren Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, k_i$ und dem Operator \vec{M}_v , der eine Differentiation in Verbindung mit der Multiplikation mit einem Materialparameter v repräsentiert.

ler möglichst klein ist und zumindest weitere bekannte systematische Fehlerquellen nicht übersteigt. Zur Wahl eines entsprechenden Volumens können verschiedene Kriterien herangezogen werden:

1. Kenntnis des Feld- beziehungsweise Potentialverlaufs in großem Abstand von der zu betrachtenden Anordnung;
2. bekanntes Verhalten der Feldgrößen an der Grenzfläche bestimmter Materialien;
3. vorhandene, a priori bekannte Symmetrieeigenschaften der Feldverteilung.

Während aus dem ersten Kriterium „offene“ Randbedingungen für bestimmte Anordnungen hergeleitet werden können [37], folgen aus den weiteren Kriterien elektrisch beziehungsweise magnetisch abgeschlossene Bedingungen. In allen Fällen wird das Verhalten der Felder im Außenraum durch die Randbedingung approximiert.

Mathematisch gesehen wird zwischen mehreren Arten von Randbedingungen für Differentialgleichungen unterschieden, die jedoch hinsichtlich der getroffenen Aussage zur Existenz einer Lösung äquivalent sind. Für eine eindimensionale elliptische Differentialgleichung in der skalaren Variablen $u(x)$ im Intervall $[a, b]$ sind die verschiedenen Arten von Randbedingungen in Tabelle 2.5 aufgeführt [36]. Sie lassen sich unmittelbar auf den höherdimensionalen beziehungsweise den parabolischen Fall übertragen. Falls die entsprechenden Konstanten α, β oder γ den Wert Null aufweisen, spricht man von der zugehörigen homogenen Randbedingung. Im hier zunächst betrachteten eindimensionalen Fall impliziert der Operator \vec{M}_v stets die erste Ableitung bezüglich der Koordinatenrichtung x . Im hö-

Formulierung	$E_t = 0$	$H_t = 0$	$D_n(J_n) = 0$	$B_n = 0$
Elektrostatik	$\phi = C_1$	-	$\varepsilon \frac{d}{dn} \phi = 0$	-
Magnetostatik ϕ_m	-	$\phi_m = C_1$	-	$\mu \frac{d}{dn} \phi_m = 0$
Magnetostatik \vec{A}	-	$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \times \vec{n} = 0$	-	$A_t = 0$
Magnetoquasistatik \vec{A}^*	$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_t^* = 0$	$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}^* \times \vec{n} = 0$	-	$\vec{A}_t^* = 0$
Magnetoquasistatik \vec{T}, ϕ_m	-	$T_t = 0,$ $\phi_m = C_1$	$(T_t = 0)$	$\mu \frac{d}{dn} \vec{T} = 0$ $\mu \frac{d}{dn} \phi_m = 0$

Tabelle 2.6: Randbedingungen an die verschiedenen Potentiale innerhalb statischer und quasistatischer Formulierungen zur Erfüllung der physikalisch motivierten Restriktionen an Feld- und Flussgrößen. Der Operator \vec{M}_v wird dabei gegenüber Tabelle 2.5 durch die entsprechend der Formulierung gültigen Differentiationsoperatoren und Materialkoeffizienten ersetzt. Konstante skalare Werte bei Dirichlet-Randbedingungen werden durch C_1 symbolisiert.

herdimensionalen Fall kommt hingegen, abhängig von der gewählten Formulierung, auch der Gradienten- beziehungsweise Rotationsoperator zum Einsatz. Der Index v steht dabei, ebenfalls auf die Formulierung bezogen, entweder für die Permittivität ε , die Permeabilität μ oder die Reluktivität $\nu = 1/\mu$.

Physikalisch motivierte Definitionen möglicher Randbedingungen ergeben sich für die tangentialen Komponenten der Feldstärken E_t und H_t sowie für die normalen Komponenten der Flussgrößen D_n , B_n und J_n . Diese korrespondieren, je nach verwendeter Formulierung, zu Randbedingungen vom Dirichlet- oder Neumann-Typ an die zugehörigen Potentiale. Für die Ableitung in Richtung des senkrecht auf der Randfläche stehenden Vektors \vec{n} ergibt sich im Fall $\vec{M}_v = \nabla$ der Ausdruck $\nabla u \cdot \vec{n} = \frac{d}{dn}$. Eine Übersicht über die Randbedingungen in Verbindung mit unterschiedlichen Formulierungen bietet Tabelle 2.6. Diejenigen Bedingungen, welche zu einer Vorgabe der Normalkomponente der elektrischen Stromdichte führen, sind in der Tabelle in Klammern angegeben. Zu beachten ist, dass auch bei der Einprägung der Randbedingungen noch eine gewisse Freiheit besteht. Die Forderung $B_n = 0$ führt genau genommen zu der Bedingung $\nabla \times \vec{A} = 0$, die zwar durch die Wahl $A_t = 0$ definitiv erfüllt wird, jedoch können auch von Null verschiedene Werte der tangentialen Komponente des magnetischen Vektorpotentials zu einer verschwindenden magnetischen Flussdichte senkrecht zu dem entsprechenden Rand führen. Dies betrifft hauptsächlich statische Formulierungen unter Verwendung des magnetischen Vektorpotentials, da im quasistatischen Fall die Forderung $B_n = 0$ meist mit $E_t = 0$ einhergeht. In der besag-

ten magnetostatischen Formulierung kann über eine inhomogene Dirichlet-Randbedingung an das magnetische Vektorpotential auf diese Weise eine konstante externe magnetische Flussdichte über einzelne Randflächen eingeprägt werden.

Ist auf der gesamten Berandung des Teilvolumens eine der genannten Bedingungen vorgeschrieben, so sind zwar die elektromagnetischen Felder eindeutig bestimmt, jedoch nicht zwangsweise die Potentiale. Dies ist im physikalischen Sinne zunächst ohne Bedeutung, da durch eine geeignete Eichung unter Ausnutzung der aus der Definition der Potentiale folgenden Freiheitsgrade eine eindeutige Bestimmung erfolgen kann [33].

Zur Modellierung des Teilvolumens, welches die zu untersuchende geometrische Anordnung enthält, werden im folgenden lediglich Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen betrachtet. Die Position der Berandung kann anhand verschiedener Kriterien bestimmt werden. Da in der Quasistatik keine Welleneigenschaften modelliert werden, kann in ausreichend großem Abstand von den Quellen der elektromagnetischen Felder stets äquivalent eine homogene Randbedingung angelegt werden. Vorauszusetzen ist hierbei, dass die Felder am Ort der Einprägung bereits näherungsweise abgeklungen sind. Insbesondere im Fall freier Ladungen oder unabgeschirmter Spulenanordnungen führt dies jedoch unter Umständen zu einem sehr großen zu betrachtenden Volumen, so dass der Einsatz offener Randbedingungen erforderlich wird. Häufig sind derartige Anordnungen jedoch von Materialien umgeben, die zu einer teilweisen Abschirmung der Felder gegenüber dem Außenraum führen und somit ein schnelleres Abklingen bewirken oder sogar eine unmittelbare Verkürzung auf die Grenzfläche des entsprechenden Materials erlauben. Im folgenden werden zwei idealisierte derartige Konzepte vorgestellt:

- Die elektrische Feldstärke steht annähernd senkrecht auf den Randflächen von Körpern sehr hoher Leitfähigkeit. Daher kann diese Eigenschaft in einer Randbedingung an entsprechenden Stellen des eingeschränkten Problemvolumens formuliert werden. In einem solchen Fall wird die tangentielle Komponente der elektrischen Feldstärke explizit zu Null gesetzt. Als Grenzfall werden sogenannte perfekt elektrisch leitende Materialien (engl. „*perfect electric conductors*“, PEC), bei welchen asymptotisch $\sigma \rightarrow \infty$ gilt, zu Modellierungszwecken, insbesondere in der Elektrostatik und der Elektroquasistatik, eingesetzt. Hier entsprechen diese in der Formulierung unter Verwendung des elektrischen Skalarpotentials einer Randbedingung vom Dirichlet-Typ. Festgelegte Potentiale innerhalb des interessierenden Gebietes werden ebenfalls auf diese Weise modelliert. Abhängig von den Zeitkonstanten des zugrundeliegenden Problems ist die Annahme $E_t = 0$ für metallische Leiter wie Silber oder Kupfer gerechtfertigt. Zusätzlich kann die Bedingung $E_t = 0$ an Flächen angelegt werden, auf welchen die elektrischen Feldlinien aufgrund einer a priori bekannten geometrischen

Symmetrie senkrecht stehen. Diese Symmetriebedingung dient als einseitige Begrenzung des betrachteten Volumens. In der Folge ergibt sich, dass an derartigen Ebenen auch die tangentiale Komponente der elektrischen Stromdichte verschwinden muss. Daher muss eine eventuell im Gebiet vorhandene eingeprägte Stromdichte senkrecht auf einer solchen Ebene stehen. Gegebenenfalls wird die Stromdichte mit negativem Vorzeichen an der Ebene gespiegelt.

- Analog steht die magnetische Feldstärke an Grenzflächen von Körpern sehr hoher Permeabilität annähernd senkrecht. Im Grenzfall $\mu \rightarrow \infty$ verschwindet die tangentiale Komponente der magnetischen Feldstärke und legt die Einführung perfekt magnetisch leitfähiger Materialien ((engl. „*perfect magnetic conductors*“, PMC)) analog zur vorherigen Betrachtung nahe. Im Gegensatz dazu existieren jedoch in der Realität nicht viele Materialien für welche diese Annahme zutreffend ist. Eine weitere Anwendung ergibt sich dennoch in Form einer Symmetriebedingung. Wenn aufgrund einer Symmetrie im Aufbau der Anordnung evident ist, dass die magnetischen Feldlinien senkrecht auf einer bestimmten Fläche stehen, so kann diese unter Verwendung der Randbedingung $H_t = 0$ in Form einer Symmetrieebene zur Begrenzung des betrachteten Volumens herangezogen werden. Innerhalb des Volumens parallel zur Ebene verlaufende Ströme werden in diesem Fall mit positivem Vorzeichen gespiegelt, so dass sich die tangentialen Komponenten der magnetischen Feldstärke an der Grenzfläche aufheben.

Nach der eventuellen Einschränkung des gesamten Raumes auf ein Teilgebiet mit Hilfe von Rand- und Symmetriebedingungen ist das elektromagnetische Feldproblem auf der Basis einer entsprechenden Formulierung charakterisiert und kann mit geeigneten Verfahren gelöst werden.

3 Numerische Lösungsansätze

Aufgrund der Komplexität in Bezug auf Größenverhältnisse und den häufig auftretenden, hochgradig inhomogenen Materialverteilungen sind analytische Lösungsverfahren für die Maxwell'schen Gleichungen nur in seltenen Fällen auf praktische Probleme in der Elektrotechnik anwendbar. Eine Alternative bieten numerische Ansätze, die von einer Zerlegung des zu untersuchenden Gebietes in zahlreiche kleine Volumen Gebrauch machen. Auf der Basis solcher Teilvolumen und der zugehörigen geometrischen Untereinheiten erfolgt eine lokale Approximation der räumlich kontinuierlichen elektromagnetischen Felder. Unter Verwendung einer endlichen Anzahl der aus dieser Diskretisierung der kontinuierlichen Größen resultierenden numerischen Freiheitsgrade wird die gesamte Verteilung der elektromagnetischen Felder im betrachteten Volumen dargestellt. Derartige volumenbasierte Diskretisierungsverfahren in Verbindung mit Integrationsverfahren zur Approximation der zeitlichen Abhängigkeit ablaufender Vorgänge bilden den Inhalt dieses Kapitels.

3.1 Methode der Finiten Integration

Ein volumenbasiertes Verfahren zur räumlichen Diskretisierung elektromagnetischer Felder stellt die Methode der Finiten Integration (engl. „*finite integration technique*“, FIT) dar. Sie wurde zunächst zur Berechnung hochfrequenter zeitharmonischer Felder vorgestellt [38]. Ebenso können schnell veränderliche Felder mit beliebiger Zeitabhängigkeit besonders effizient beschrieben werden [39]. Auch für Anwendungen in der Berechnung von Wirbelströmen sowie für allgemeine quasistatische Problemstellungen ist die Methode der Finiten Integration geeignet [25, 40].

Die Methode basiert auf einer räumlichen Zerlegung des zu betrachtenden Gebietes. Zum Zweck der Aufteilung in Teilvolumen kommen verschiedene geometrische Grundformen in Frage. Als besonders vorteilhaft erweist sich die Verwendung kartesischer hexagonaler Gitter, wobei jedoch auch Verallgemeinerungen auf nicht orthogonale Gitter [41] oder allgemein polyhedrale Gitterformen vorgeschlagen wurden [42]. Weiterhin sind die Konzepte der Methode grundsätzlich auch auf Dreiecksgitter im Rahmen einer zweidimensionalen geometrischen Approximation anwendbar [43]. In den letztgenannten verallgemeinerten

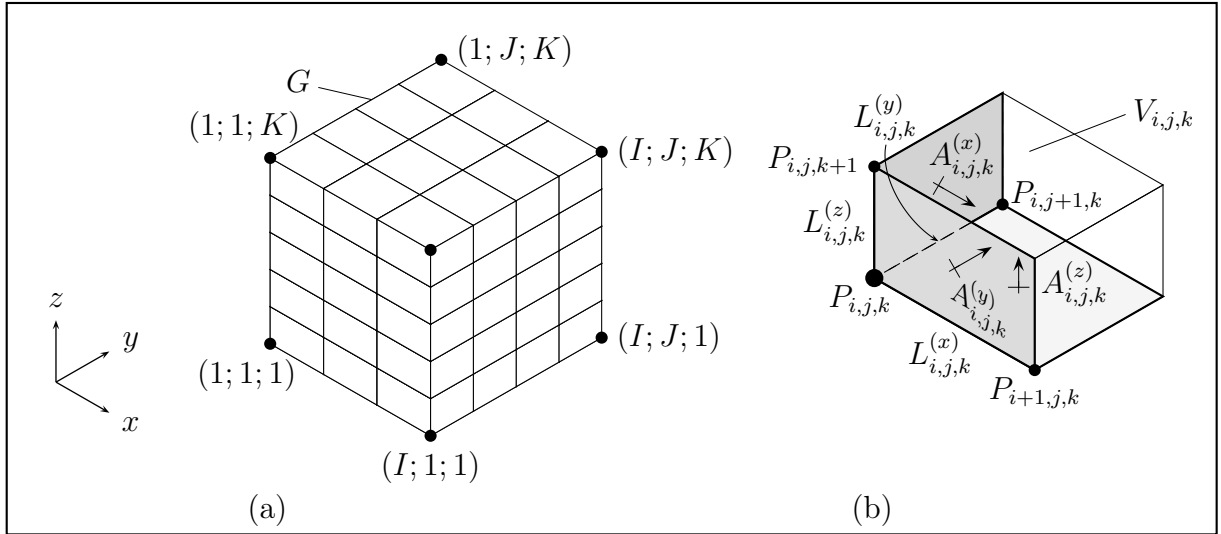


Abbildung 3.1: (a) Volumendiskretisierung und Indizierung der enthaltenen Knoten $P_{i,j,k}$ mit $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$ und $1 \leq k \leq K$; (b) beliebige Zelle $V_{i,j,k}$ aus G zusammen mit den entsprechenden Elementarkanten und -flächen, deren Indizierung anhand des zugehörigen Knotens $P_{i,j,k}$ erfolgt.

Fällen geht jedoch ein Teil der Effizienz bei der praktischen Berechnung verloren. Die folgenden Abschnitte dieses Unterkapitels geben einen Überblick über die im Rahmen der Methode der Finiten Integration eingeführten und verwendeten Konzepte zur numerischen Beschreibung der Maxwell'schen Gleichungen für den Spezialfall rechtwinkliger kartesischer Gitter.

3.1.1 Die Gitter-Maxwellgleichungen

Mit dem Ziel einer räumlich diskreten Beschreibung der elektromagnetischen Felder wird das zu betrachtende Volumen Ω in quaderförmige Teilbereiche zerlegt. Eine solche Form G der Zerlegung ist in Abbildung 3.1(a) dargestellt. Sie entsteht durch die Definition einer Punkteschar $P_{i,j,k}(x_i, y_j, z_k)$ entlang der Koordinatenrichtungen. Dabei werden jeweils I, J, K Punkte in x -, y - und z -Richtung angeordnet. Insgesamt beträgt die Anzahl von Punkten somit $N_p = IJK$. Die Indizierung der entstehenden Elementarvolumina erfolgt anhand des Indexsatzes, der die jeweils kleinsten Indizes der das Volumen aufspannenden Knoten in den drei Raumrichtungen enthält. Ein solches Elementarvolumen $V_{i,j,k}$ zeigt Abbildung 3.1(b) zusammen mit weiteren geometrischen Elementarfiguren, Strecken L und Flächen A , geringerer Dimension. Zu jedem Punkt $P_{i,j,k}$ in G gehören somit nach Konvention drei, in positiver Koordinatenrichtung und somit auch positiver Indexrichtung

gezählte Elementarstrecken L , die über die Punkteschar P gemäß

$$L_{i,j,k}^{(x)} = \overline{x_{i+1} - x_i} \quad \text{für } 1 \leq i \leq I-1, \quad (3.1)$$

$$L_{i,j,k}^{(y)} = \overline{y_{j+1} - y_j} \quad \text{für } 1 \leq j \leq J-1, \quad (3.2)$$

$$L_{i,j,k}^{(z)} = \overline{z_{k+1} - z_k} \quad \text{für } 1 \leq k \leq K-1, \quad (3.3)$$

definiert sind. Als Index erhalten sie den ihres jeweiligen Startpunktes. Dabei ist zu beachten, dass an den positiven Rändern von Ω Kanten der Länge Null entstehen, die jedoch aus formalen Gründen dennoch in die Notation aufgenommen werden. Die Elementarflächen A bestimmen sich analog über

$$A_{i,j,k}^{(x)} = L_{i,j,k}^{(y)} L_{i,j,k}^{(z)} \quad \text{für } j \neq J, k \neq K, \quad (3.4)$$

$$A_{i,j,k}^{(y)} = L_{i,j,k}^{(x)} L_{i,j,k}^{(z)} \quad \text{für } i \neq I, k \neq K, \quad (3.5)$$

$$A_{i,j,k}^{(z)} = L_{i,j,k}^{(x)} L_{i,j,k}^{(y)} \quad \text{für } i \neq I, j \neq J. \quad (3.6)$$

Dabei weisen die Flächennormalen der entstehenden Elementarflächen in die zugehörigen positiven Koordinatenrichtungen. Ähnlich wie im Fall der Elementarstrecken entstehen hier für $i = I$, $j = J$ sowie $k = K$ degenerierte Flächen, deren Inhalt Null ist. Auch diese werden formal in der weiteren Notation mitgeführt. Die Elementarvolumen sind gemäß

$$V_{i,j,k} = L_{i,j,k}^{(x)} L_{i,j,k}^{(y)} L_{i,j,k}^{(z)} \quad \text{für } i \neq I, j \neq J, k \neq K \quad (3.7)$$

bestimmt, wobei auch hier die Fälle der Randindizes I, J, K über virtuelle Zellen des Volumeninhalts Null in der Beschreibung des Gitters G berücksichtigt werden.

Zur Vereinfachung der Notation wird im folgenden eine kanonische Indizierung über nur einen Index n verwendet, der gemäß

$$n = 1 + (i-1)M_x + (j-1)M_y + (k-1)M_z \quad (3.8)$$

mit $M_x = 1$, $M_y = I$, $M_z = IJ$ aus den drei räumlichen Indizes I, J, K hervorgeht. Gleichung (3.8) gilt aufgrund der zuvor getroffenen Annahmen über Randkanten, -flächen und -volumen für alle Indizes $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$, $1 \leq k \leq K$, so dass die Anzahl an Knoten und Volumen in G formal N_p sowie die Anzahl zu G gehöriger Kanten und Flächen $3N_p$ beträgt.

Anhand des so definierten Gitters wird aus der Integralform der kontinuierlichen Maxwell'schen Gleichungen gemäß der Gleichungen (2.9) bis (2.12) eine diskrete Darstellung hergeleitet. Dies geschieht anschaulich zunächst für den Fall des Induktionsgesetzes, das durch Gleichung (2.9) gegeben ist. Zur Herleitung dient eine beliebige Fläche S_Ω , die mit der Berandungsfläche $A_n^{(z)}$ der Zelle V_n zusammenfällt. Die Begrenzungslinie dieser Fläche

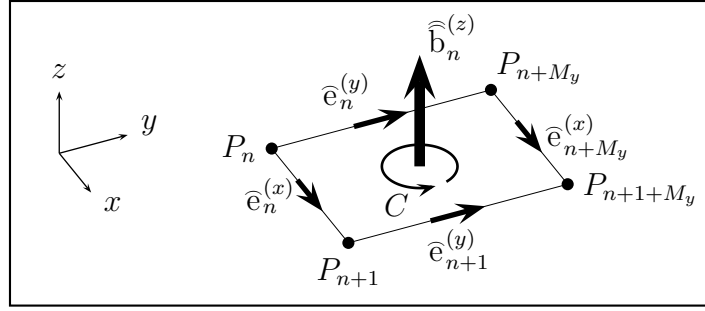


Abbildung 3.2: Veranschaulichung des diskreten Induktionsgesetzes: Definition der Orientierung der Gitterspannungen; Darstellung einer einzelnen Gitterfläche und des zugehörigen Linienintegrals entlang der Kurve C .

∂S_Ω wird durch eine geschlossene Kurve C charakterisiert. Das entsprechende Linienintegral wird in vier Teilintegrale entlang der zugehörigen Gitterkanten aufgespalten und lautet somit

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{C_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{C_4} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (3.9)$$

Die Wegelemente $d\vec{s}$ werden parallel zur Richtung der Teilstrecken C_α mit $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ gewählt, so dass sich die Integration unter der Annahme einer konstanten tangentialen Komponente des elektrischen Feldes auf dem entsprechenden Teilstück zu einer skalaren Multiplikation vereinfacht. Dies gibt Anlass zur Definition der Größen

$$\hat{e}_\xi^{(\chi)} = \int_{C_\alpha} \vec{E} \cdot d\vec{s} \approx E_\chi L_\xi^{(\chi)}, \quad (3.10)$$

wobei χ jeweils für die x -, y - oder z -Richtung steht und ξ einen beliebigen kanonischen Gitterindex bezeichnet. Aufgrund ihrer Definition in Form eines Integrals über die elektrische Feldstärke werden sie als **elektrische Gitterspannungen** bezeichnet. Anzumerken ist, dass die angegebene Approximation an dieser Stelle keine Notwendigkeit darstellt und die Definition der Gitterspannungen über die Integrale zunächst exakt ist. In Verbindung mit der aus Abbildung 3.2 ersichtlichen Konvention zur Benennung und Orientierung der einzelnen Größen kann Gleichung (3.9) in die Form

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \hat{e}_n^{(x)} + \hat{e}_{n+1}^{(y)} - \hat{e}_{n+M_y}^{(x)} - \hat{e}_n^{(y)} \quad (3.11)$$

überführt werden. Zum Zweck der diskreten Darstellung der rechten Seite des Induktionsgesetzes muss die magnetische Flussdichte über die Fläche S_Ω integriert werden. Auch hier vereinfacht sich die Integration unter der Annahme eines über die Fläche konstanten

Wertes der Normalkomponente zu einer skalaren Multiplikation. Die sogenannten *magnetischen Gitterflüsse* sind somit über

$$\widehat{\widehat{\mathbf{b}}}_\xi^{(x)} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \approx B_x A_\xi^{(x)}, \quad (3.12)$$

definiert. Auch hier stellen die Gitterflüsse an sich noch keine Näherung dar, sondern fungieren lediglich als eine formale Darstellung des zugehörigen Integrals. Somit lautet die diskrete Form des Induktionsgesetzes für die ausgewählte Integrationsfläche

$$\widehat{\mathbf{e}}_n^{(x)} + \widehat{\mathbf{e}}_{n+1}^{(y)} - \widehat{\mathbf{e}}_{n+M_y}^{(x)} - \widehat{\mathbf{e}}_n^{(y)} = -\frac{d}{dt} \widehat{\widehat{\mathbf{b}}}_n^{(z)}. \quad (3.13)$$

Die eingeführten Gitterspannungen und Flüsse werden unter Verwendung der kanonischen Indizierung in algebraischen Vektoren

$$\widehat{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}^{(x)} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{(y)} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{(z)} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\widehat{\widehat{\mathbf{b}}} = \begin{pmatrix} \widehat{\widehat{\mathbf{b}}}^{(x)} \\ \widehat{\widehat{\mathbf{b}}}^{(y)} \\ \widehat{\widehat{\mathbf{b}}}^{(z)} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

der Länge $3N_p$ angeordnet. Zusätzlich werden die in Gleichung (3.13) vorkommenden Vorzeichen vor den Gitterspannungen als Koeffizienten einer Matrix \mathbf{C} (engl. „curl“) der Dimension $3N_p \times 3N_p$ gesammelt. Somit kann das diskrete Induktionsgesetz für alle Gitterkanten und -flächen in kompakter Matrixnotation

$$\mathbf{C}\widehat{\mathbf{e}} = -\frac{d}{dt} \widehat{\widehat{\mathbf{b}}} \quad (3.16)$$

geschrieben werden. Diese Gleichung wird auch als erste Gitter-Maxwellgleichung bezeichnet. Aufgrund der formalen Ähnlichkeit zum Induktionsgesetz in Differentialform in Gleichung (2.1) kann die Matrix \mathbf{C} auch als diskretes Analogon zum kontinuierlichen Rotationsoperator gesehen werden. Sie ist quadratisch, dünnbesetzt (engl. „sparse“) und enthält in jeder Zeile vier von Null verschiedene Einträge. Diese nehmen nur die Werte 1 und -1 an. Folglich ist sie rein topologischer Natur und im Gegensatz zum analytischen Operator frei von Metrikoeffizienten.

In analoger Vorgehensweise wird das durch Gleichung (2.12) beschriebene Gesetz zur Quellenfreiheit der magnetischen Flussdichte in Integralform behandelt. Die Normalkomponente der magnetische Flussdichte kann, wie weiter oben bereits beschrieben, über die magnetischen Gitterflüsse $\widehat{\widehat{\mathbf{b}}}$ dargestellt werden. Aus Gleichung (2.12) folgt, dass die Summe

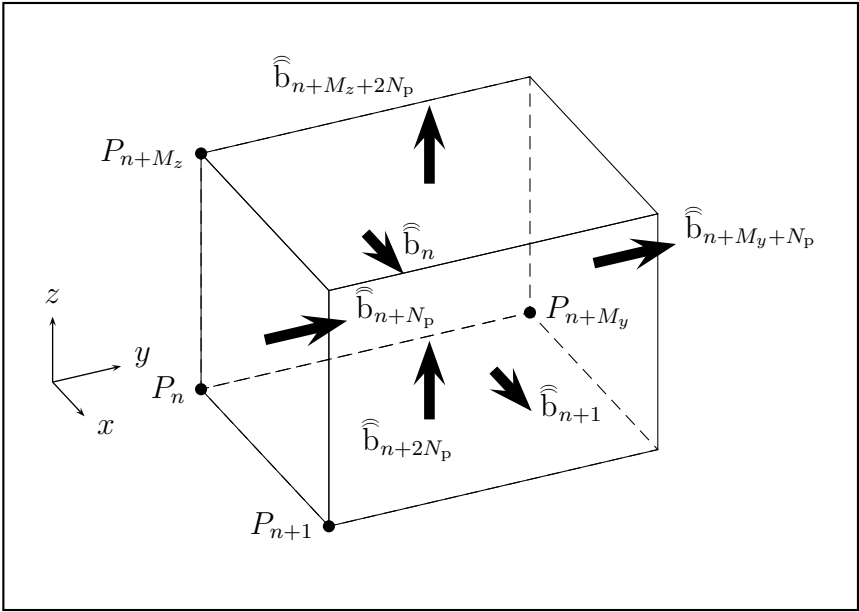


Abbildung 3.3: Veranschaulichung der Diskretisierung des Gesetzes zur Nicht-Existenz magnetischer Ladungen: Zur Zelle V_n sowie zu angrenzenden Zellen gehörige magnetische Gitterflüsse zusammen mit ihrer Orientierung.

aller aus einem Volumen heraustretender magnetischer Flüsse verschwinden muss. Gemäß Abbildung 3.3 kann diese Forderung durch eine vorzeichenrichtige Addition der zu der Zelle V_n und den angrenzenden Zellen gehörigen magnetischen Gitterflüsse auf Gitterebene nachgebildet werden. Für die betrachtete Zelle V_n lautet die betreffende Gleichung somit

$$-\widehat{\mathbf{b}}_n + \widehat{\mathbf{b}}_{n+1} - \widehat{\mathbf{b}}_{n+N_p} + \widehat{\mathbf{b}}_{n+M_y+N_p} - \widehat{\mathbf{b}}_{n+2N_p} + \widehat{\mathbf{b}}_{n+M_z+2N_p} = 0. \quad (3.17)$$

Die gemäß der Konvention zur Wahl der Richtung der Flächennormalen auftretenden Vorzeichen werden wiederum in einer topologischen Matrix \mathbf{S} (engl. „*source*“) zusammengefasst. Diese enthält in jeder Zeile sechs von Null verschiedene Einträge und kann als diskretes Analogon zum kontinuierlichen Divergenzoperator in Gleichung (2.4) gesehen werden. Zusammengefasst für alle Gitterflächen und -zellen lautet somit das diskrete Gesetz zur Nicht-Existenz magnetischer Ladungen

$$\mathbf{S}\hat{\hat{\mathbf{b}}} = 0. \quad (3.18)$$

Die Diskretisierung der weiteren Maxwell'schen Gleichungen kann prinzipiell ebenfalls auf der Basis des Gitters G erfolgen. Dabei treten jedoch Probleme bei der Verknüpfung der gitterbasierten physikalischen Größen über die Materialkoeffizienten auf. Mit Hilfe zusätzlicher Interpolationen auf dem Gitter ist eine solche Diskretisierung jedoch dennoch möglich. Eine elegantere und insbesondere numerisch effizientere Lösung besteht in der

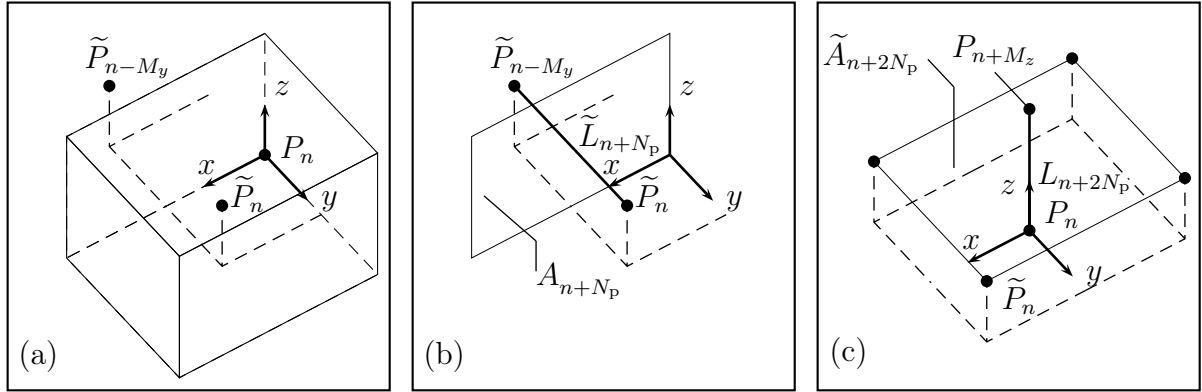


Abbildung 3.4: Veranschaulichung der Konstruktion des dualen Gitters \tilde{G} aus (a) Punkten \tilde{P}_ξ , (b) Kanten \tilde{L}_ξ und (c) Flächen \tilde{A}_ξ . Die dualen Zellen \tilde{V}_ξ ergeben sich aus der Verbindung der entsprechenden dualen Punkte.

Einführung eines zusätzlichen **dualen** Gitters \tilde{G} . Daher wird das bereits eingeführte Gitter G im folgenden als **primäres** Gitter bezeichnet. Ein duales Gitter wird gemäß der folgenden Anforderungen konstruiert:

1. Die dualen Gitterpunkte liegen in den Zentren der primären Volumen.
2. Jede primäre Fläche wird in ihrem Mittelpunkt von genau einer dualen Kante durchstoßen.
3. Jede primäre Kante schneidet genau eine duale Fläche im Winkel von 90° in deren Mittelpunkt.
4. Der Schnittwinkel zwischen primären Flächen und dualen Kanten beträgt 90° .

Grundsätzlich kann ein solches duales Gitter unter den ersten drei Anforderungen zu jedem beliebigen Gitter G konstruiert werden. Die vierte Bedingung ist jedoch nicht immer erfüllbar. Falls alle vier Kriterien erfüllt werden können, spricht man von einem dual-orthogonalen Gitter. Ein solches ist für den hier betrachteten Fall kartesischer Koordinaten durch eine Verschiebung der primären Gitterzellen um jeweils eine halbe Kantenlänge in allen drei Raumrichtungen gemäß Abbildung 3.4 konstruierbar. Die Indizierung wird dabei so gewählt, dass jede primäre Kante L_ξ die duale Fläche \tilde{A}_ξ mit demselben Index ξ durchstößt. Ebenso schneidet jede duale Kante \tilde{L}_ξ die primäre Fläche A_ξ . Am Rand des dualen Gitters \tilde{G} werden die Kanten auf die Hälfte verkürzt, so dass die Grenzen von \tilde{G} und G übereinstimmen. Daher treten, anders als im primären Gitter, im dualen Gitter keine im Sinne verschwindender Längen, Flächen oder Volumen entarteten Größen auf.

Die Diskretisierung des durch Gleichung (2.10) charakterisierten Durchflutungsgesetzes wird auf der Basis des dualen Gitters \tilde{G} durchgeführt. Für das Linienintegral der magneti-

schen Feldstärke auf der linken Seite der Gleichung kann wie im Fall des Induktionsgesetzes vorgegangen werden. Ein Unterschied besteht lediglich in dem verwendeten Integrationspfad. Wie in Abbildung 3.2 wird eine Orientierung der Kanten vorgegeben, aus der sich die Vorzeichen der analog zu Gleichung (3.10) definierten **magnetischen Gitterspannungen**

$$\widehat{h}_\xi^{(x)} = \int_{C_\alpha} \vec{H} \cdot d\vec{s} \approx H_\chi \widetilde{L}_\xi^{(x)} \quad (3.19)$$

ergeben. Dabei verläuft die Integration hier entlang der dualen Kanten, die zu der Berandung C einer dualen Gitterfläche \widetilde{A}_n gehören. Zur Beschreibung der Flächenintegrale über die elektrische Flussdichte sowie über die verschiedenen Anteile der elektrischen Stromdichte auf der rechten Seite von Gleichung (2.12) werden ebenfalls integrale Zustandsgrößen $\widehat{\vec{d}}$ und $\widehat{\vec{j}}$, die **elektrischen Gitterflüsse** sowie die **elektrischen Gitterströme**, gemäß

$$\widehat{\vec{d}}_\xi^{(x)} = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{A} \approx D_\chi \widetilde{A}_\xi^{(x)} \quad (3.20)$$

$$\widehat{\vec{j}}_\xi^{(x)} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} \approx J_\chi \widetilde{A}_\xi^{(x)} \quad (3.21)$$

eingeführt. Diese entstehen durch Integration über die zu dem gewählten Umlauf gehörige duale Gitterfläche. Somit lautet die diskrete Form des Durchflutungsgesetzes für die Fläche $\widetilde{A}_n^{(z)}$ unter Zusammenfassung der Leitungsstromdichte und der eingepprägten Stromdichte

$$\widehat{h}_n^{(x)} + \widehat{h}_{n+1}^{(y)} - \widehat{h}_{n+M_y}^{(x)} - \widehat{h}_n^{(y)} = \frac{d}{dt} \widehat{\vec{d}}_n^{(z)} + \widehat{\vec{j}}_n^{(z)}. \quad (3.22)$$

Die auftretenden Vorzeichen werden in einer Matrix $\widetilde{\mathbf{C}}$ für das duale Gitter zusammengefasst, welche die duale Entsprechung der Matrix \mathbf{C} auf dem primären Gitter darstellt. Somit lautet das diskrete Durchflutungsgesetz für alle dualen Gitterkanten und -flächen in Matrixschreibweise

$$\widetilde{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt} \widehat{\mathbf{d}} + \widehat{\mathbf{j}}. \quad (3.23)$$

Auch das Gaußsche Gesetz nach Gleichung (2.11) wird auf dem dualen Gitter \widetilde{G} ausgewertet. Dabei wird wie in Abbildung 3.3 für das Gesetz der Nicht-Existenz magnetischer Ladungen vorgegangen. Im Unterschied dazu wird nun die elektrische Flussdichte über die sechs Randflächen einer dualen Zelle integriert. Die linke Seite des Gaußschen Gesetzes kann somit durch die vorzeichenrichtige Summation der zugehörigen elektrischen Gitterflüsse auf dem dualen Gitter erfolgen. Die Ladungsdichte ϱ auf der linken Seite muss dementsprechend über das gesamte duale Volumen integriert werden. Konsequenterweise

müssten bei der Definition der volumenintegrierten Ladungsdichte drei Bögen in der Notation verwendet werden, auf die jedoch im allgemeinen ganz verzichtet wird. Die diskreten *elektrischen Gitterladungen* werden somit als

$$q_\xi = \int_V \varrho dV \approx \varrho_\xi V_\xi \quad (3.24)$$

definiert. Für eine duale Gitterzelle lautet damit das Gaußsche Gesetz

$$-\widehat{d}_n + \widehat{d}_{n+1} - \widehat{d}_{n+N_p} + \widehat{d}_{n+M_y+N_p} - \widehat{d}_{n+2N_p} + \widehat{d}_{n+M_z+2N_p} = q_n. \quad (3.25)$$

Werden wiederum, analog zur Vorgehensweise im Fall des Gesetzes zur Nicht-Existenz magnetischer Ladungen, die Vorzeichen in einer Matrix $\widetilde{\mathbf{S}}$ für das duale Gitter zusammengefasst, lautet die diskrete Darstellung des Gaußschen Gesetzes in Matrixform für alle dualen Gitterflächen und -volumen

$$\widetilde{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{d}} = \mathbf{q}. \quad (3.26)$$

Somit steht nun eine algebraische Darstellung des vollständigen Satzes der Maxwell'schen Gleichungen auf der Basis eines dual-orthogonalen Gitterpaars zur Verfügung. Bei der Herleitung wurden formal noch keine Näherungen eingebracht, da die Definition der Gitterspannungen, -flüsse und -ladungen lediglich eine Aufteilung in Teilintegrale über fundamentale Bestandteile des gewählten Gitters nach sich zieht. Dies ändert sich bei der Betrachtung der Verknüpfung der elektromagnetischen Feld- und Flussgrößen über die Materialkoeffizienten gemäß der Gleichungen (2.5) bis (2.7), die Gegenstand des folgenden Abschnittes ist.

3.1.2 Die Materialmatrizen

Im folgenden werden lediglich die gängigen Verfahren zur Herleitung der diskreten Beziehungen zwischen den Feld- und Flussgrößen auf dem Gitter behandelt, die zu einer sehr einfachen und numerisch vorteilhaften Darstellung führen. Die Zuordnung der Materialfüllung zu Gitterzellen erfolgt willkürlich anhand des primären Gitters. Dabei wird hier stets von einer vollständigen Füllung mit einem für den Bereich der betreffenden Zelle konstanten Material ausgegangen. Teilgefüllte Zellen können jedoch bei vergleichbarem Aufwand zu einer erheblichen Verringerung des durch die sogenannte treppenförmigen Approximation (engl. „*staircase*“) entstehenden Modellierungsfehlers führen [44]. Eine materialgefüllte Gitterzelle ist somit allein durch die Eigenschaften ε , μ und σ des zugeordneten Materials charakterisiert.

Zur Herleitung einer allgemeinen Beziehung zwischen der elektrischen Flussdichte und der elektrischen Feldstärke auf diskreter Basis muss ein Zusammenhang zwischen den auf

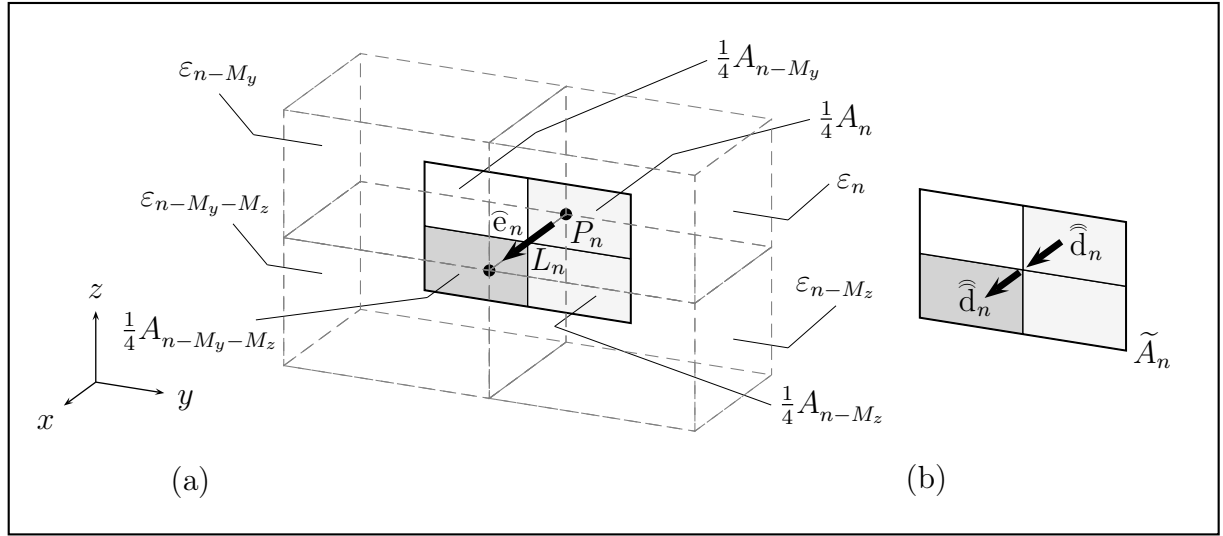


Abbildung 3.5: (a) Bestimmung der Relation zwischen elektrischem Gitterfluss und elektrischer Gitterspannung anhand der dualen Fläche \tilde{A}_n ; (b) Stetigkeit des elektrischen Gitterflusses senkrecht zu Materialübergängen.

dem dualen beziehungsweise primären Gitter angenommenen Größen $\hat{\mathbf{d}}$ und $\hat{\mathbf{e}}$ hergestellt werden. Diese erfüllen nach Definition bereits die gemäß der Maxwell'schen Gleichungen gültigen Stetigkeitsbedingungen, da sie durch die gewählte Anordnung auf den Gitterflächen und -kanten eindeutig bestimmt sind. Zunächst wird eine einzelne, in x -Richtung orientierte, duale Fläche \tilde{A}_n betrachtet, die gemäß Abbildung 3.5(a) innerhalb von vier primären Zellen mit im allgemeinen unterschiedlicher Materialfüllung verläuft. Aufgrund der Konstruktion des dualen Gitters \tilde{G} kann in erster Näherung für den dual-orthogonalen Fall eine eindeutige Beziehung für jedes Paar von dualen Flächen und primären Kanten hergestellt werden. Diese ist durch die skalaren Koeffizienten

$$(\mathbf{M}_\epsilon)_{\xi,\xi}^{(\chi)} = \frac{\hat{d}_\xi^{(\chi)}}{\hat{e}_\xi^{(\chi)}} \quad (3.27)$$

für den kanonischen Gitterindex ξ und die räumliche Orientierung χ , welche an dieser Stelle für die x -, y - oder z -Richtung steht, gegeben. Die x -Komponente der elektrischen Flussdichte verläuft zwar, wie in Abbildung 3.5(b) veranschaulicht, stetig über die Materialgrenze, jedoch treten in der Ebene der dualen Fläche Sprünge auf. Nach Einsetzen der kontinuierlichen Materialbeziehung aus Gleichung (2.5) in die Definition des elektrischen Gitterflusses ist jedoch eine stetige Funktion über die duale Fläche gegeben, da die elektrische Feldstärke hier tangential zu den Materialgrenzen verläuft. Somit kann die x -Komponente der elektrischen Feldstärke in eine Taylorreihe in der (y, z) -Ebene entwickelt werden. Nach der Aufteilung in Teilintegrale über die in Abbildung 3.5(a) verzeichneten

Flächenbeiträge entsteht für den elektrischen Gitterfluss die Darstellung

$$\widehat{\mathbf{d}}_n = \bar{\varepsilon}_n E_x \tilde{A}_n + \mathcal{O}(\Delta_l^{3\dots 4}), \quad (3.28)$$

wobei $\Delta_l = \max_\chi \tilde{L}_n^{(\chi)}$ gilt und die flächengemittelte Permittivität $\bar{\varepsilon}$ definiert ist als

$$\bar{\varepsilon}_n = \frac{1}{4\tilde{A}_n} \left(\varepsilon_n A_n + \varepsilon_{n-M_y} A_{n-M_y} + \varepsilon_{n-M_z} A_{n-M_z} + \varepsilon_{n-M_y-M_z} A_{n-M_y-M_z} \right). \quad (3.29)$$

Die in Gleichung (3.28) als Funktion der maximalen dualen Kantenlänge angegebene Ordnung verbleibender Fehlerterme nimmt nur im Fall einer homogenen Materialverteilung sowie koordinatenweise äquidistanter Diskretisierung die obere Schranke vier an.

Zur Auswertung des Quotienten in Gleichung (3.27) wird das Integral innerhalb der Definition der elektrischen Gitterspannungen \bar{e}_ξ in Gleichung (3.10) approximiert. Die Herleitung erfolgt anhand der primären Kante L_n in Abbildung 3.5. Aufgrund der Stetigkeit ist eine Taylorentwicklung in x -Richtung zulässig. Als Entwicklungspunkt wird der Kantenmittelpunkt gewählt, der gleichzeitig den Durchstoßpunkt der dualen Fläche bezeichnet. Damit folgt

$$\bar{e}_n = \int_{L_n} E_x dx = E_x L_n + \mathcal{O}(\Delta_l^3). \quad (3.30)$$

Hierbei beträgt die Ordnung verbleibender Fehlerterme immer drei, da nach Voraussetzung bei der Gitterkonstruktion der Entwicklungspunkt auf der dualen Fläche stets in der Mitte der primären Kante liegt.

Somit gilt für das betrachtete Paar aus dualer Fläche und primärer Kante mit dem Index n als auch allgemein für Indizes ξ in den Raumrichtungen χ des Gitters

$$(\mathbf{M}_\varepsilon)_{\xi,\xi}^{(\chi)} = \tilde{A}_\xi^{(\chi)} \bar{e}_\xi \left(L_\xi^{(\chi)} \right)^{-1} + \mathcal{O}(\Delta_l^{1\dots 2}). \quad (3.31)$$

Die beschriebene Prozedur wird für alle dualen Flächen und primären Kanten paarweise ausgeführt, so dass eine Diagonalmatrix

$$\mathbf{M}_\varepsilon = \text{diag} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\varepsilon^{(x)} \\ \mathbf{M}_\varepsilon^{(y)} \\ \mathbf{M}_\varepsilon^{(z)} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

der Dimension $3N_p \times 3N_p$ entsteht. Die gitterbasierte Entsprechung der kontinuierlichen Materialbeziehung (2.5) lautet somit in Matrixform

$$\widehat{\mathbf{d}} = \mathbf{M}_\varepsilon \bar{\mathbf{e}}. \quad (3.33)$$

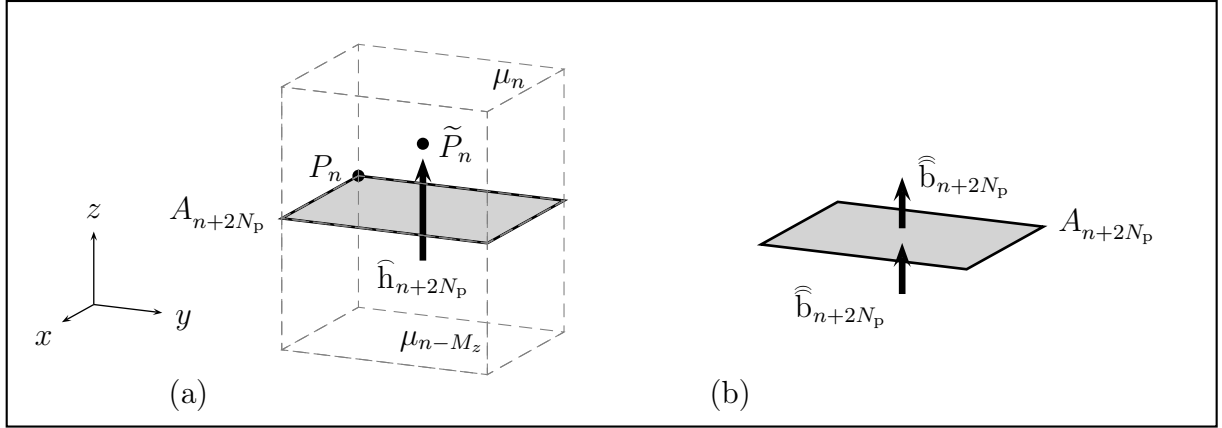


Abbildung 3.6: (a) Veranschaulichung der inversen Längenmittelung für die Permeabilität; (b) Stetigkeit der primären magnetischen Gitterflüsse an Materialgrenzen.

Zur Bestimmung der gitterbasierten Relation zwischen den elektrischen Gitterströmen $\hat{\mathbf{j}}$ und den elektrischen Gitterspannungen $\hat{\mathbf{e}}$ auf der Basis des kontinuierlichen Zusammenhangs in Gleichung (2.7) kann die gleiche Methode verwendet werden, da die Zuordnung der Fluss- und Spannungsgrößen zu dualen und primärem Gitter sowie die Stetigkeitsanforderungen übereinstimmen. In Matrixform lautet daher, unter Ersetzung der Permittivität ε durch die elektrische Leitfähigkeit σ in den entsprechenden Gleichungen, die Gitterbeziehung unmittelbar

$$\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{M}_\sigma \hat{\mathbf{e}}. \quad (3.34)$$

Bei der Diskretisierung von Gleichung (2.6) zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen magnetischer Flussdichte und magnetischer Feldstärke muss die veränderte Situation bezüglich der Gittertopologie in Verbindung mit den Stetigkeitsanforderungen für die magnetischen Feld- und Flussgrößen beachtet werden. Damit stetige Feld- beziehungsweise Flussgrößen bei der Bestimmung der gitterbasierten Materialrelation bereitstehen, wird in diesem Fall der Zusammenhang zwischen $\hat{\mathbf{h}}$ und $\hat{\mathbf{b}}$ unter Verwendung der Reluktivität $\nu = 1/\mu$ betrachtet. Analog zu den vorherigen Betrachtungen werden die skalaren Koeffizienten

$$(\mathbf{M}_\nu)_{\xi,\xi}^{(x)} = \frac{\hat{h}_\xi^{(x)}}{\hat{b}_\xi^{(x)}} \quad (3.35)$$

eingeführt. Anhand des in Abbildung 3.6(a) dargestellten Übergangs zwischen zwei mit Materialien unterschiedlicher Permeabilität gefüllten primären Zellen wird die Bestimmung dieser Koeffizienten veranschaulicht. Zunächst wird das Linienintegral der magnetischen Feldstärke entlang der dualen Kante \tilde{L}_{n+2N_p} ausgewertet. Da jedoch, wie in Abbildung 3.6(b) dargestellt, nur die normale Komponente der magnetischen Flussdichte an

Materialübergängen stetig ist, wird \vec{H} über $\vec{H} = \nu \vec{B}$ ausgedrückt. Für die nunmehr entlang der betreffenden Kante stetige Funktion B_z kann eine Taylorentwicklung um den mit der primären Fläche A_{n+2N_p} gemeinsamen Punkt durchgeführt werden. Durch Einsetzen und anschließende Integration über die beiden, zu unterschiedlichen primären Zellen gehörigen, Anteile der dualen Kante folgt für die magnetische Gitterspannung

$$\widehat{h}_{n+2N_p} = \bar{\nu}_{n+2N_p} B_z \widetilde{L}_{n+2N_p} + \mathcal{O}(\Delta_l^{2\dots 3}), \quad (3.36)$$

unter Einführung der mittleren Reluktivität

$$\bar{\nu}_{n+2N_p} = \frac{\nu_{n-M_z} L_{n-M_z+2N_p} + \nu_n L_{n+2N_p}}{2\widetilde{L}_{n+2N_p}}. \quad (3.37)$$

Wiederum wird die obere Schranke in der angegebenen Ordnung der Fehlerterme nur im Fall koordinatenweise äquidistanter Gitter in Verbindung mit homogener Materialverteilung angenommen. Im Gegensatz zu den vorher behandelten Materialrelationen kommt hier somit eine Längenmittelung über die zugehörigen dualen Kanten zum Einsatz.

Zur Bestimmung des Nenners in Gleichung (3.35) muss die magnetische Flussdichte über die zugehörige primäre Fläche integriert werden. Für den in Abbildung 3.6(a) vorliegenden Fall steht die z -Komponente der magnetischen Flussdichte senkrecht auf dem Materialübergang und ist somit stetig. Eine entsprechende Taylorentwicklung in der Ebene der primären Fläche führt nach Einsetzen und anschließender Integration zu dem Ausdruck

$$\widehat{b}_{n+2N_p} = B_z A_{n+2N_p} + \mathcal{O}(\Delta_l^4) \quad (3.38)$$

für den magnetischen Gitterfluss. Die Ordnung der verbleibenden Fehlerterme beträgt aufgrund des nach Konstruktion stets in der Mitte der primären Fläche liegenden Entwicklungspunktes unabhängig von der Wahl der Gitterschrittweiten in den Koordinatenrichtungen immer vier. Damit bestimmen sich die Koeffizienten allgemein für jede Kombination aus dualer Kante und primärer Fläche zu

$$(\mathbf{M}_\nu)_{\xi,\xi}^{(x)} = \widetilde{L}_\xi^{(x)} \bar{\nu}_\xi \left(A_\xi^{(x)} \right)^{-1} + \mathcal{O}(\Delta_l^{1\dots 2}). \quad (3.39)$$

Analog zu Gleichung (3.32) ergibt sich aus den einzelnen Koeffizienten für die drei Koordinatenrichtungen die globale Materialmatrix bezüglich der Reluktivität ν und damit der gesuchte Zusammenhang

$$\widehat{\mathbf{h}} = \mathbf{M}_\nu \widehat{\mathbf{b}} \quad (3.40)$$

zwischen den magnetischen Spannungs- und Flussgrößen auf dem gewählten Gitterpaar $\{G, \widetilde{G}\}$.

primäres Gitter G		duales Gitter \tilde{G}
Knoten P_ξ	\Leftrightarrow	Volumen \tilde{V}_ξ
Kanten $L_\xi^{(x)}$	\Leftrightarrow	Flächen $\tilde{A}_\xi^{(x)}$
Flächen $A_\xi^{(x)}$	\Leftrightarrow	Kanten $\tilde{L}_\xi^{(x)}$
Volumen V_ξ	\Leftrightarrow	Knoten \tilde{P}_ξ

Tabelle 3.1: Entsprechungen primärer und dualer Gitterelemente im Fall eines orthogonalen Gitterpaars $\{G, \tilde{G}\}$ zusammen mit der verwendeten Notation.

Die hier beschriebene Form der Diskretisierung der kontinuierlichen Materialbeziehungen stellt nur eine der zahlreichen Möglichkeiten dar. Insbesondere im Fall von Übergängen zwischen Materialien mit stark unterschiedlichen Koeffizienten entstehen mitunter lokal sehr große Fehler bei der Approximation. Für diese Sonderfälle können alternative Mittelungsvorschriften zu einer Verbesserung des Approximationsverhaltens führen. Dies kann einerseits unter Erhaltung der diagonalen Matrixstruktur [45] oder andererseits unter Einführung zusätzlicher Nebendiagonalen geschehen [46]. Eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung des Approximationsverhaltens besteht in der Verwendung von Ansätzen höherer Ordnung zur Beschreibung der Feld- und Flussgrößen um den Entwicklungspunkt [47]. Dabei muss jedoch zusätzlich auf weitere Komponenten im Gitter zurückgegriffen werden, so dass auch in diesem Fall Bandmatrizen im Gegensatz zu Diagonalmatrizen entstehen.

Zusammen mit den in Abschnitt 3.1.1 hergeleiteten Gitter-Maxwellgleichungen steht mit den Materialgleichungen in Matrixform nun eine räumlich diskrete Beschreibung der elektromagnetischen Felder auf einem dual-orthogonalen Gitterpaar zur Verfügung. Diese Form der Beschreibung bietet zahlreiche Vorteile, die im folgenden Abschnitt erläutert werden.

3.1.3 Eigenschaften der Methode

Aufgrund der in Abschnitt 3.1.1 angegebenen Konstruktionsvorschrift für das duale Gitter ergeben sich im Sonderfall der Orthogonalität die in Tabelle 3.1 aufgeführten Analogien zwischen den einzelnen fundamentalen Gittereinheiten. Diese gelten in eingeschränkter Weise auch bei fehlender Orthogonalität, wobei in diesem Fall lediglich die Ausrichtung der Kanten und Flächen auf primärem und dualen Gitter nicht mehr parallel ist. Die Eindeutigkeit entsprechender Kombinationen bleibt jedoch nach Definition erhalten.

Wie bereits angedeutet repräsentieren die Matrizen \mathbf{C} und $\tilde{\mathbf{C}}$ beziehungsweise \mathbf{S} und $\tilde{\mathbf{S}}$ diskrete Differentiationsoperatoren für die integralen Zustandsgrößen auf dem jeweiligen

Gitter G, \tilde{G} . Sie stellen im hier betrachteten Fall niedrigster Ordnung lediglich eine topologische Beziehung zwischen den entsprechenden integralen Zustandgrößen her. So ordnet der transponierte diskrete Divergenzoperator $\tilde{\mathbf{S}}^T$ jeder dualen Fläche die beiden dualen Volumen zu, deren Grenzfläche sie darstellt. Da die Fläche aufgrund der Konvention zur Definition ihres Normalenvektors jeweils einmal positiv und einmal negativ gezählt wird, weist jede Zeile zwei von Null verschiedene Einträge der Werte 1 und -1 auf. Topologisch entspricht dies anhand von Tabelle 3.1 gerade der Inzidenzbeziehung zwischen zwei primären Knoten, welche die Begrenzung einer primären Kante darstellen. Dies gibt Anlass zur Definition der diskreten Entsprechung des Gradientenoperators

$$\mathbf{G} = -\tilde{\mathbf{S}}^T, \quad (3.41)$$

wobei das negative Vorzeichen aus der unterschiedlichen Indexkonvention bei der Zuordnung der Kanten und Flächen zu den Knoten auf primärem und dualen Gitter bei positiver Orientierung entlang der Koordinatenachsen resultiert. Der Operator erzeugt somit aus Knotenpotentialen die zugehörigen Kantenspannungen auf dem primären Gitter. Analog kann ein Zusammenhang zwischen dualen Knoten und Kanten über den dualen Gradientenoperator

$$\tilde{\mathbf{G}} = -\mathbf{S}^T \quad (3.42)$$

hergeleitet werden, wie beispielsweise in [48] dargestellt. Auf der Basis ähnlicher topologischer Argumente kann ein Zusammenhang zwischen den beiden Rotationsoperatoren auf dem Gitterpaar $\{ G, \tilde{G} \}$ hergestellt werden. Eine Zeile des transponierten Operators \mathbf{C}^T bezüglich des primären Gitters enthält von Null verschiedene Einträge an Indexpositionen, die denjenigen der primären Flächen entsprechen, welche die entsprechende Kante gemeinsam haben. Die sich aus den Umläufen entlang der entsprechenden primären Flächen für die Kante ergebenden Vorzeichen entsprechen gerade denjenigen, die bei der Bildung des Umlaufes entlang der zugeordneten dualen Fläche verwendet werden, um nach Konvention eine positive Orientierung in den Koordinatenrichtungen zu garantieren. Daraus folgt somit unmittelbar

$$\mathbf{C}^T = \tilde{\mathbf{C}}. \quad (3.43)$$

Ein Vorzeichenwechsel ist hier, beispielsweise nach [49], nicht erforderlich, da voraussetzungsgemäß die Indizes sich schneidender primärer und dualer Gitterelemente übereinstimmen und auf beiden Gittern die Richtung der Kanten und Flächen positiv entlang der Koordinatenrichtungen gezählt wird.

Weitere topologische Überlegungen führen zu algebraischen Analogien der diskreten Matrizen $\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}}, \mathbf{S}, \tilde{\mathbf{S}}, \mathbf{G}$ und $\tilde{\mathbf{G}}$ zu entscheidenden vektoranalytischen Beziehungen der entsprechenden kontinuierlichen Differentiationsoperatoren:

- Die Bildung der Divergenz gestaltet sich auf Gitterebene durch eine vorzeichenrichtige Summation der zugehörigen Gitterflüsse. Diese gehen wiederum aus der Rotation von Gitterspannungen hervor. Da bei der entsprechenden Summation über die Gitterflüsse jede Kante einmal mit positivem und negativem Vorzeichen auftritt, verschwinden die Produkte

$$\mathbf{S}\mathbf{C} \equiv 0, \quad (3.44)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{C}} \equiv 0 \quad (3.45)$$

jeweils identisch. Diese Eigenschaft stellt eine wichtige Äquivalenz zu der vektoranalytischen Identität $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{K}) \equiv 0$ für die gitterbasierten Größen, sowohl auf dem primären als auch auf dem dualen Gitter, dar [50].

- Auch die Rotationsfreiheit von Gradientenfeldern $\nabla \times (\nabla f)$ überträgt sich, unter Verwendung der obigen Identitäten, auf das dual-orthogonale Gitterpaar gemäß

$$\mathbf{C}\mathbf{G} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{S}}^T \equiv 0, \quad (3.46)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S}^T \equiv 0. \quad (3.47)$$

Weiterhin lässt sich mit Hilfe der oben hergeleiteten Identitäten zeigen, dass bei dem eingesetzten räumlichen Diskretisierungsverfahren Energie und Ladung Erhaltungsgrößen darstellen [51, 42].

Somit steht eine konsistente Beschreibung der Maxwellschen Gleichungen einschließlich der notwendigen Differentialoperatoren auf Gitterebene zur Verfügung. Daher können analytische Vorgehensweisen bei der Umformung der Maxwellschen Gleichungen direkt auf Gitterebene in algebraischer Schreibweise vorgenommen werden. So entsteht beispielsweise die diskrete Darstellung

$$\tilde{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{j}} - \frac{d}{dt}\mathbf{q} = 0 \quad (3.48)$$

der Kontinuitätsgleichung (2.13) in Integralform unmittelbar durch linksseitige Anwendung des Matrixoperators $\tilde{\mathbf{S}}$ auf das Durchflutungsgesetz in Gleichung (3.23) und anschließendes Einsetzen von Gleichung (3.25).

Auch die in Abschnitt 2.3 beschriebenen quasistatischen Formulierungen lassen sich direkt aus den Gitter-Maxwellgleichungen (3.16), (3.18), (3.23) und (3.26) in Verbindung mit den diskreten Materialgesetzen aus den Gleichungen (3.33), (3.34) sowie (3.40) analog zur analytischen Vorgehensweise herleiten. In jedem Fall entstehen Matrixgleichungen, welche die gegebene Problemstellung im räumlich diskreten Sinn beschreiben. Diese können, je nach zugrundeliegender Formulierung, unmittelbar mit Hilfe numerischer Verfahren gelöst oder einem Zeitintegrationsverfahren unterworfen werden. Im Rahmen dieser Arbeit

wird in Bezug auf zeitabhängige Problemstellungen nur diese, als Linienmethode bekannte Vorgehensweise zur Lösung partieller Differentialgleichungen in räumlichen und zeitlichen Variablen eingesetzt.

3.2 Methode der Finiten Elemente

Die Methode der Finiten Elemente zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen beruht auf dem Konzept, die gesuchten Größen anhand der Überlagerung lokaler Ansatzfunktionen auf einer Volumenzerlegung des Rechengebiets zu approximieren. Die grundlegenden Ideen für diese Methode entstanden bereits am Anfang sowie im Laufe der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Der Begriff „Finite Elemente“ wurde zum ersten Mal im Jahr 1960 verwendet [52]. Dabei waren zunächst Anwendungsbereiche aus dem Bauingenieurwesen sowie insbesondere der Struktur- und Kontinuumsmechanik von Interesse [53, 54]. Durch die zunächst beschränkte, jedoch stetig zunehmende Verfügbarkeit von Rechnern gewann die Methode in Verbindung mit numerischen Lösungstechniken für die resultierenden algebraischen Gleichungssysteme zunehmend an Bedeutung [55]. In der folgenden Zeit wurden auch Anwendungsgebiete innerhalb der Elektrotechnik erschlossen. Beispiele hierfür sind im Rahmen der Simulation von Wellenleiterstrukturen als auch im Zusammenhang mit der Bestimmung der quasistatischen elektromagnetischen Felder, insbesondere der Wirbelströme, in Generatoren und elektrischen Maschinen zu finden [56, 57, 58, 59]. Die bis dahin bekannte Variante bot zunächst nicht die bei der Lösung der Maxwell'schen Gleichungen vorteilhafte, und aus dem vorangegangenen Abschnitt bekannte, konsistente Darstellung der Feld- und Flussgrößen im diskretisierten Raum. Diese wünschenswerte Eigenschaft kann jedoch durch eine Anpassung der Ansatzfunktionen an die entsprechenden Stetigkeitsanforderungen auch bei der Methode der Finiten Elemente sichergestellt werden [60, 61, 62]. Im folgenden wird diese Klasse von Ansatzfunktionen in ihrer Anwendung auf die Maxwell'schen Gleichungen in Differentialform vorgestellt. Analog zur Methode der Finiten Integration besteht im Fall niedrigster Approximationsordnung eine geometrische Interpretation für die Anordnung der entsprechenden Feld- und Flussgrößen auf dem verwendeten Gitter gemäß Tabelle 3.2. In diesem Zusammenhang spricht man auch, angelehnt an die räumliche Dimension der zugeordneten Gittereinheiten, von 0-, 1-, 2- und 3-Formen [63]. Es kann gezeigt werden, dass bei entsprechender Konstruktion der Ansatzfunktionen die diskreten Größen einer exakten De-Rham-Sequenz genügen [62]. Diese Tatsache lässt sich auch auf den Fall von Ansatzfunktionen höherer Approximationsordnung übertragen [64]. Dabei ist es jedoch notwendig, sich zumindest in der Begrifflichkeit von der geometrischen Anschauung zu lösen, da diese Ansatzfunktionen nicht mehr ausschließlich mit

physikalische Größe	Stetigkeit	zugeordnete Gittereinheit	Ansatzfunktion
ϕ	vollständig	Knoten	skalar
\vec{E}, \vec{H}	tangential	Kante	vektoriell
\vec{D}, \vec{B}	normal	Fläche	vektoriell
ϱ	keine	Volumen	skalar

Tabelle 3.2: Zuordnung der physikalischen Größen zu Gittereinheiten anhand der aus den Maxwell'schen Gleichungen resultierenden Stetigkeitsanforderungen an Materialübergängen.

einer einzelnen Gittereinheit assoziiert bleiben. Im Rahmen der Notation der diskreten Differentialformen kann diese Zuordnung formal in Gestalt einer abstrakten Interpretation bestehen bleiben [65]. Von dieser Schreibweise wird jedoch im folgenden kein Gebrauch gemacht. Stattdessen werden die unterschiedlichen Klassen von Ansatzfunktionen anhand ihrer speziellen Stetigkeitseigenschaften bezeichnet. Dies führt lediglich zu einer abweichenden Notation, während die Ergebnisse der Herleitung mit den unter Verwendung diskreter Differentialformen erzielten übereinstimmen.

3.2.1 Skalare Ansatzfunktionen für Potentiale

Der Vorgang der Definition von Ansatzfunktionen zur Approximation physikalischer Größen beginnt mit der Wahl eines Gitters. Das zu untersuchende Volumen wird dazu in geometrische Simplexes unterteilt. Dabei können die in Abbildung 3.7 beispielhaft dargestellten Formen oder eine Kombination dieser zum Einsatz kommen. Im folgenden werden jedoch ausschließlich Volumendiskretisierungen unter Verwendung von Tetraedern betrachtet. Die Anzahl der aus der Volumenzerlegung resultierenden Elemente beträgt T . Dabei wird die Anzahl der als Eckpunkte von Tetraedern entstehenden Punkte mit N , die der Kanten mit E sowie die der Flächen mit F bezeichnet. Im weiteren wird nur von Elementen mit planarer Berandung ausgegangen. Zur lokalen Approximation einer skalaren Funktion $K(x, y, z)$ auf dem Gebiet eines beliebigen Tetraeders T_e gemäß

$$K(x, y, z) \approx \sum_{\xi} k_{\xi} w_{\xi}^s(x, y, z) \quad (3.49)$$

sind Ansatzfunktionen $w_{\xi}^s(x, y, z)$ gesucht, die auf dem ihnen jeweils zugeordneten Knoten ξ den Wert 1 annehmen und am Ort aller übrigen Knoten verschwinden. Mit dieser Forderung wird eine lokale Interpolation der Funktion anhand der von ihr an den Knoten des Tetraeders angenommenen Werte definiert. Die Anzahl an Knoten muss im allgemeinen

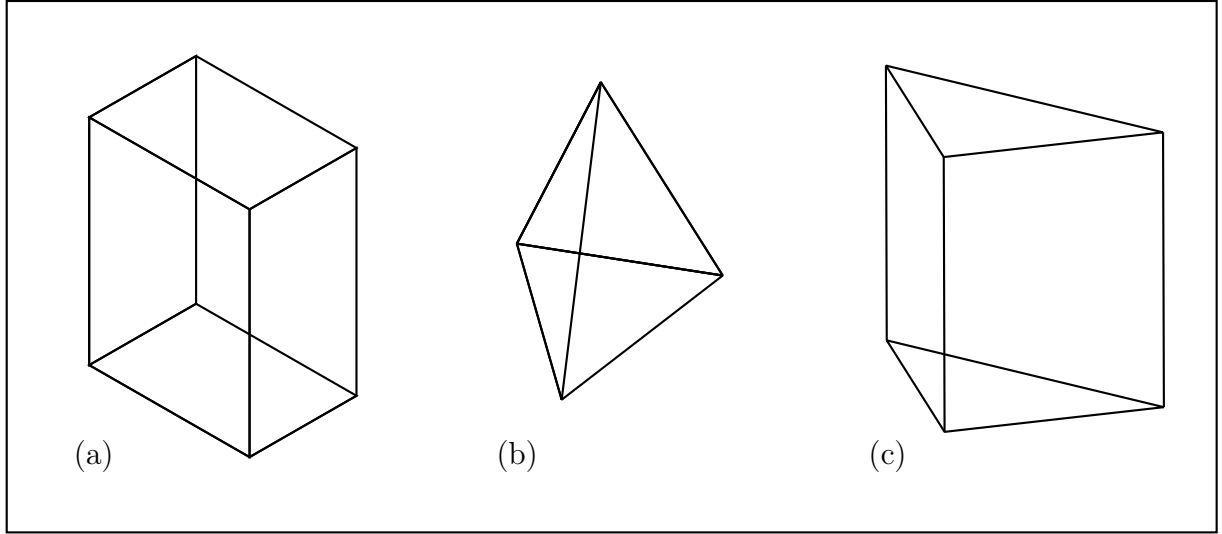


Abbildung 3.7: Einige mögliche geometrische Simplexes zur Unterteilung des zu betrachtenden Volumens im Rahmen der Methode der Finiten Elemente: (a) Hexaeder, (b) Tetraeder und (c) Prisma.

nicht notwendigerweise mit der an Eckpunkten übereinstimmen. Im hier zunächst interessierenden Fall sei dennoch davon auszugehen. Für die folgenden Betrachtungen wird ein Referenztetraeder im lokalen Koordinatensystem $\hat{\mathbf{r}} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ gemäß Abbildung 3.8(a) zusammen mit einer lokalen Indizierung der Eckpunkte eingeführt. Jedes beliebige Element T_e , wie in Abbildung 3.8(b) dargestellt, kann über die affine Transformation $g : \hat{\mathbf{r}} \mapsto \mathbf{J}\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{r}_0$ aus dem lokalen System erzeugt werden. Die Transformationsvorschrift lautet in Matrixform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

wobei als Aufpunkt \mathbf{r}_0 willkürlich $P_1(x_1, y_1, z_1)$ gewählt ist. Die Transformation ist regulär, solange keine entarteten Tetraeder im Sinne eines verschwindenden Volumens auftreten. In diesem Fall existiert auch die Umkehrung g^{-1} der Abbildung. Aufgrund der Existenz der Transformationsvorschrift können nun alle weiteren Betrachtungen anhand des Referenzelements \hat{T} durchgeführt werden. Die gesuchten Interpolationspolynome für die Eckpunkte \hat{P}_ξ mit $\xi \in \{1, 2, 3, 4\}$ haben die Form

$$\lambda_\xi(\hat{\mathbf{r}}) = d_{\xi,1} + d_{\xi,2}\alpha + d_{\xi,3}\beta + d_{\xi,4}\gamma. \quad (3.51)$$

Durch Einsetzen der Koordinaten der vier Eckpunkte unter der Forderung, dass die Funktionen λ_ξ am Eckpunkt ξ den Wert 1 aufweisen und an allen übrigen Eckpunkten verschwinden, entsteht somit für jede gesuchte Funktion λ_ξ ein zu lösendes lineares Gleichungssystem.

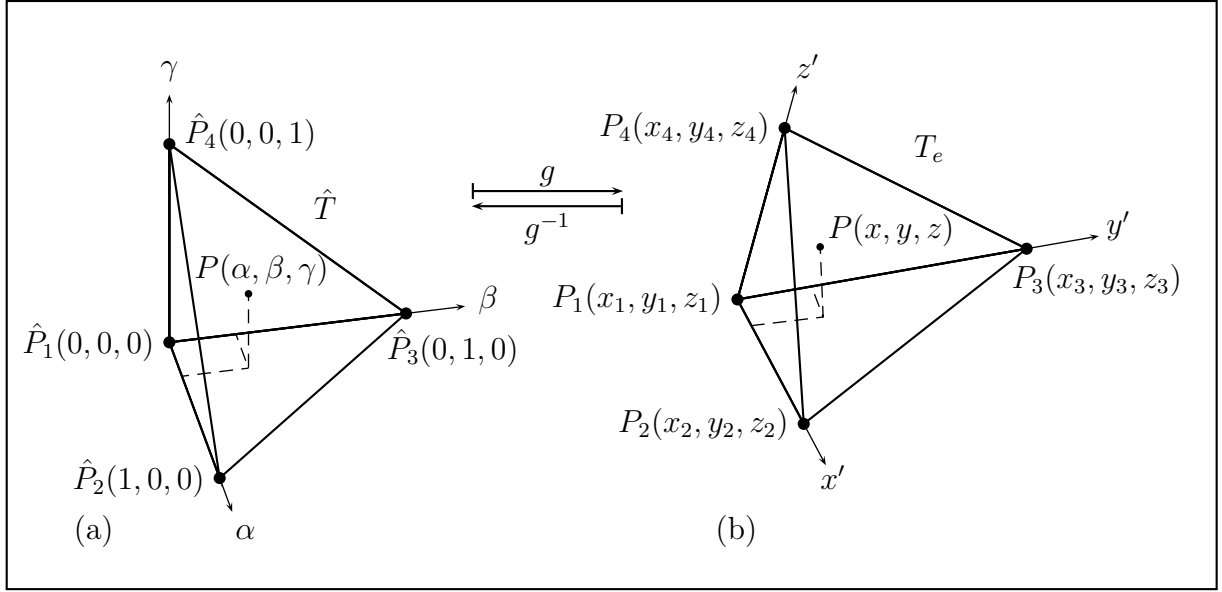


Abbildung 3.8: (a) Lokales Referenzkoordinatensystem (α, β, γ) mit planarem, isoparametrischem Referenztetraeder \hat{T} ; (b) allgemeines Tetraeder T_e im globalen Koordinatensystem (x, y, z) .

chungssystem in den Koeffizienten $d_{\xi,1}, d_{\xi,2}, d_{\xi,3}$ sowie $d_{\xi,4}$. Damit ergeben sich die gesuchten Funktionen zu

$$\lambda_1 = 1 - \alpha - \beta - \gamma, \quad (3.52)$$

$$\lambda_2 = \alpha, \quad (3.53)$$

$$\lambda_3 = \beta, \quad (3.54)$$

$$\lambda_4 = \gamma. \quad (3.55)$$

Der Wert dieser Ansatzfunktionen an einem Punkt ist nur von dessen relativer Position innerhalb des Tetraeders und somit nicht von der Transformation g abhängig [66]. Zusammengefasst weist jede der auf diese Art gefundenen Funktionen die folgenden Eigenschaften auf:

1. In dem ihr zugeordneten Eckpunkt ξ nimmt sie den Wert $\lambda_\xi = 1$ an.
2. Der Wert von λ_ξ in allen anderen als dem ihr assoziierten Eckpunkt beträgt $\lambda_\xi = 0$.
3. Von dem zugehörigen Eckpunkt aus variiert sie linear in Richtung der gegenüberliegenden Fläche.
4. Sie ist (innerhalb des Tetraeders) nicht negativ sowie nicht größer als 1.

Mit diesen Eigenschaften definieren diese Funktionen eine Lagrange-Basis für den Raum der Monome

$$\mathcal{P}^{(p)} = \{\alpha^{p_1} \beta^{p_2} \gamma^{p_3}\}, p_1 + p_2 + p_3 \leq p, \quad (3.56)$$

hier für den Fall $p = 1$, zur Interpolation innerhalb des Referenzsystems. Aufgrund der Invarianz gegenüber der affinen Abbildung g gilt weiterhin für die im globalen System definierte Funktion die Darstellung

$$K(x, y, z) = \sum_{\xi} K(x_{\xi}, y_{\xi}, z_{\xi}) \lambda_{\xi}(g^{-1}(x, y, z)) \quad (3.57)$$

in Abhängigkeit der lokalen Lagrange-Basis. Die entsprechenden Polynome sind über ihre Nullstellen eindeutig bestimmt. Daher können unter Verwendung dieser Basis alle Funktionen vom Grad $p_1 + p_2 + p_3 \leq 1$ exakt dargestellt werden.

In der Praxis ist es nicht notwendig, die Koeffizienten der Ansatzfunktionen für jedes Tetraeder explizit aufzustellen, da eine Auswertung immer über das Referenzelement zusammen mit der zugehörigen Transformation g_n erfolgen kann. Damit lauten die in Gleichung (3.49) eingeführten Ansatzfunktionen

$$w_{\xi}^s(x, y, z) = \lambda_{\xi}(g^{-1}(x, y, z)). \quad (3.58)$$

Aufgrund der Vorgehensweise bei der Aufstellung über ein Interpolationspolynom sowie den angegebenen Eigenschaften werden die Funktionen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und λ_4 als Lagrange-Ansatzfunktionen bezeichnet. Sie bilden eine nicht orthogonale Basis des Funktionenraums $\mathcal{P}^{(1)}$.

Ansatzfunktionen höherer Ordnung

Die eingeführten Ansatzfunktionen erster Ordnung basieren auf einer linearen Interpolation der gesuchten Größe auf dem Tetraeder. Um zu Ansätzen höherer Ordnung zu gelangen, kann der Grad des Interpolationspolynoms erhöht werden. Entsprechend müssen in der Folge auch mehr als die vier Eckpunkte zur Definition herangezogen werden. Allgemein ist die Anzahl notwendiger Stützstellen zur Konstruktion vollständiger Funktionenräume $\mathcal{P}^{(p)}$ zum Grad p nach Gleichung (3.56) durch

$$n_{\text{Knoten}} = \frac{1}{6} (p+1)(p+2)(p+3) \quad (3.59)$$

gegeben. Prinzipiell ist die Anordnung dieser zusätzlichen Stützstellen unter Beibehaltung der Eckpunkte als Knoten beliebig. Aus Gründen der gewünschten Stetigkeitseigenschaften wird jedoch die in Abbildung 3.9 dargestellte Konvention verwendet [67]. Die lineare Lagrange-Basis kann gemäß $P(\alpha, \beta, \gamma) = P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ auch zur eindeutigen Identifikation von Punkten innerhalb des Tetraeders herangezogen werden. Daher erfolgt die

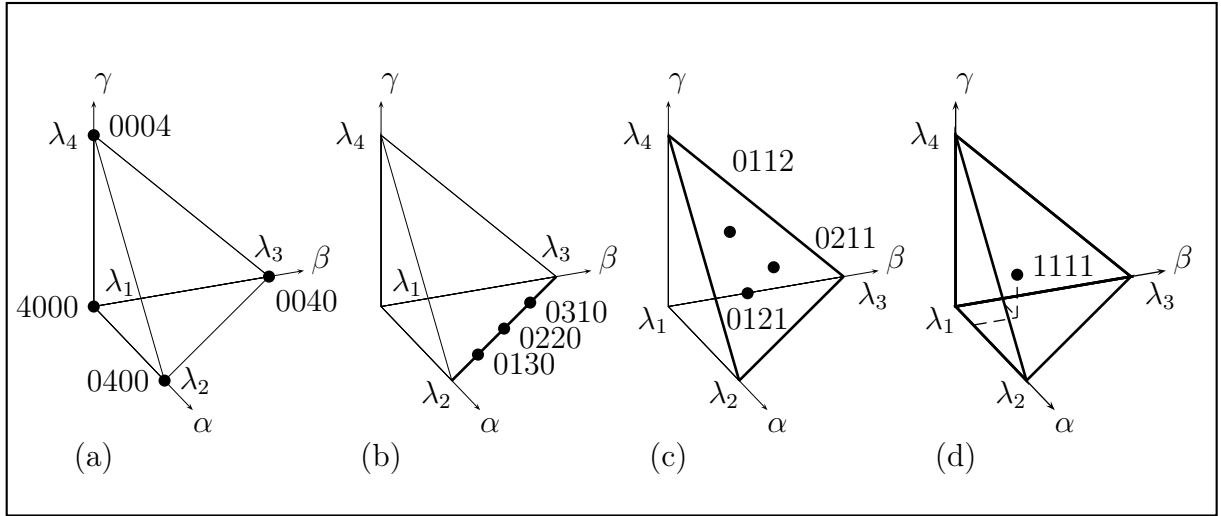


Abbildung 3.9: Indizierung der Knoten gemäß $p\lambda_1p\lambda_2p\lambda_3p\lambda_4$ und Anordnung der assoziierten Ansatzfunktionen für Elemente höherer Ordnung (hier für $p = 4$): (a) Knotenfunktionen, (b) Kantenfunktionen, (c) Flächenfunktionen und (d) Volumenfunktionen.

Gittereinheit	Ansatzfunktionen	Index	Anzahl/Einheit	Bedingung
Eckpunkt	Knotenfunktionen	n	1	$p > 0$
Kante	Kantenfunktionen	e	$(p - 1)$	$p > 1$
Fläche	Flächenfunktionen	f	$(p - 2)(p - 1)/2$	$p > 2$
Volumen	Volumenfunktionen	v	$(p - 3)(p - 2)(p - 1)/6$	$p > 3$

Tabelle 3.3: Benennung und Anzahl der skalaren Ansatzfunktionen höherer Ordnung.

Indizierung der zusätzlichen Stützstellen anhand von vier ganzen Zahlen, die dem Wert der Lagrange-Ansatzfunktionen am Ort des jeweiligen Knotens multipliziert mit der Ordnung des Tetraeders entsprechen. Die Ansatzfunktionen werden anhand der Zuordnung des ihren assoziierten Knotens zu der entsprechenden Gittereinheit in Abbildung 3.9(a) bis (d) gemäß Tabelle 3.3 benannt. Gesucht ist somit in diesem Fall eine Basis des Funktionenraums $\mathcal{P}^{(p)}$. Grundsätzlich bestehen bei der Konstruktion einer solchen Basis zur Ordnung p unterschiedliche Möglichkeiten:

- Direkte Konstruktion **interpolatorischer** Ansatzfunktionen $L_\xi^{(n[e,f,v],I,p)}$ vom Lagrange-Typ über das zugehörige Interpolationspolynom entsprechenden Grades.
- Verwendung der bereits gefundenen linearen Ansatzfunktionen $L_\xi^{(n,I,1)} = \lambda_\xi$ in Verbindung mit **hierarchischem** Hinzufügen weiterer Funktionen $L_\xi^{(n[e,f,v],H,p)}$ auf der Basis zusätzlicher Knoten.

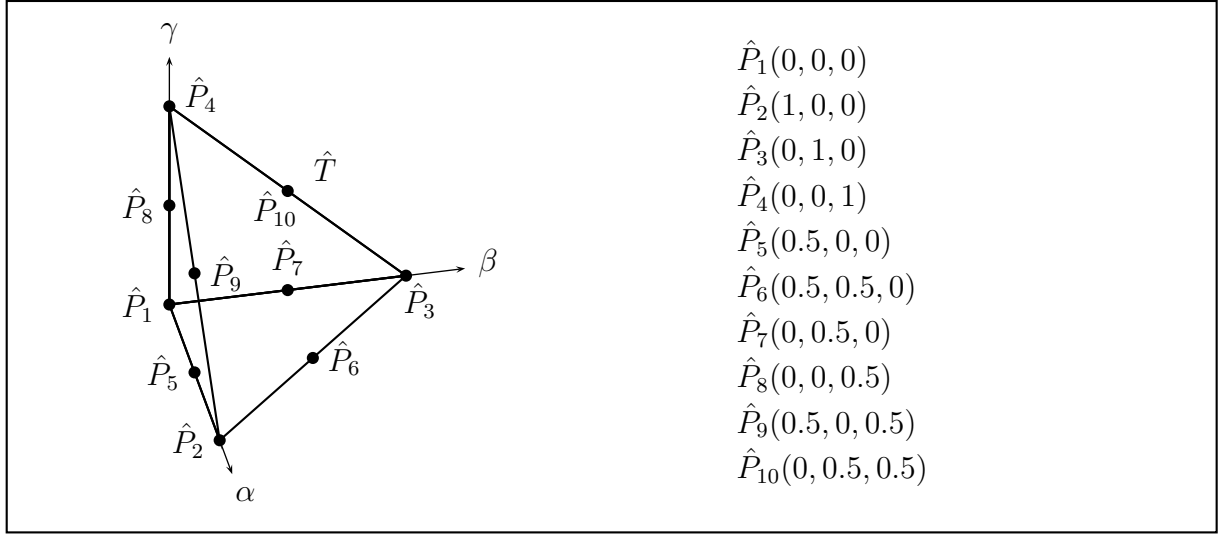


Abbildung 3.10: Planares isoparametrisches Referenztetraeder zur Definition quadratischer Ansatzfunktionen im lokalen Koordinatensystem $\hat{\mathbf{r}}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Zur Konstruktion einer Basis müssen erneut Koeffizienten eines Polynoms zur Interpolation einer beliebigen Funktion auf dem Referenztetraeder \hat{T} analog zu Gleichung (3.51) gefunden werden. Dieses Polynom hat für den Fall $p = 2$ die Form

$$\begin{aligned}
 L_{\xi}^{(n[e], I, 2)}(\hat{\mathbf{r}}) = & d_{i,1} + d_{i,2}\alpha + d_{i,3}\beta + d_{i,4}\gamma \\
 & + d_{i,5}\alpha\beta + d_{i,6}\alpha\gamma + d_{i,7}\beta\gamma \\
 & + d_{i,8}\alpha^2 + d_{i,9}\beta^2 + d_{i,10}\gamma^2.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Zur eindeutigen Bestimmung sind gemäß Gleichung (3.59) genau zehn Knoten zusammen mit dem gewünschten Wert der Funktion an deren Position erforderlich. In Abbildung 3.10 werden die zusätzlichen Knoten entsprechend der Konvention in Tabelle 3.3 für den Fall $p = 2$ jeweils in der Mitte der sechs Kanten des Tetraeders plazierte. Die Modalindizierung über die vier ganzzahligen Werte wird in eine lineare Indizierung in ξ gemäß Tabelle 3.4 überführt. Dabei wird im allgemeinen der Index in der Reihenfolge der Knoten-, Kanten-, Flächen- und Volumenfunktionen vergeben. Für den hier betrachteten Fall planarer Elemente bleibt die Transformation g auf ein globales Tetraeder T_n linear affin und ist wie für den Fall linearer Ansatzfunktionen gemäß Gleichung (3.50) gegeben. Zur Bestimmung jeder Funktion $L_{\xi}^{(n[e], I, 2)}$ muss ein Gleichungssystem in den Koeffizienten $d_{i,1}$ bis $d_{i,10}$ gelöst werden, welches durch Einsetzen der Koordinaten der Stützstellen aus Tabelle 3.4 aufgestellt wird. Die Funktionswerte an den Stützstellen ergeben sich wiederum aus der Forderung, dass die gesuchte Funktion an ihrem zugeordneten Knoten ξ den Wert 1 annimmt, während sie am Ort aller übrigen Knoten verschwindet. Das resultierende Polynom in α , β und γ kann durch Umgruppierung der einzelnen Summanden über die aus den Gleichun-

ξ	Ort	modaler Index	α	β	γ
1	n_1	2000	0.0	0.0	0.0
2	n_2	0200	1.0	0.0	0.0
3	n_3	0020	0.0	1.0	0.0
4	n_4	0002	0.0	0.0	1.0
5	e_{12}	1100	0.5	0.0	0.0
6	e_{23}	0110	0.5	0.5	0.0
7	e_{13}	1010	0.0	0.5	0.0
8	e_{14}	1001	0.0	0.0	0.5
9	e_{24}	0101	0.5	0.0	0.5
10	e_{34}	0011	0.0	0.5	0.5

Tabelle 3.4: Lineare Indizierung der Knoten in der Reihenfolge ihrer zugeordneten Gittereinheiten.

gen (3.52) bis (3.55) bereits bekannte Lagrange-Basis $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ des Referenztetraeders \hat{T} ausgedrückt werden. Die Ansatzfunktionen lauten damit

$$\begin{aligned}
L_\xi^{(n,I,2)} &= \lambda_\xi(2\lambda_\xi - 1), \quad \xi \in \{1, 2, 3, 4\}, \\
L_5^{(e,I,2)} &= 4\lambda_1\lambda_2, & L_6^{(e,I,2)} &= 4\lambda_2\lambda_3, \\
L_7^{(e,I,2)} &= 4\lambda_1\lambda_3, & L_8^{(e,I,2)} &= 4\lambda_1\lambda_4, \\
L_9^{(e,I,2)} &= 4\lambda_2\lambda_4, & L_{10}^{(e,I,2)} &= 4\lambda_3\lambda_4.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Sie stellen eine vollständige Lagrange-Basis des Funktionenraums $\mathcal{P}^{(2)}$ dar. Eine weitere Erhöhung der Ordnung kann analog über entsprechende Interpolationsansätze gefunden werden. Die Lagrange-Basis zur Ordnung p kann ebenso direkt in Abhängigkeit der Interpolationspolynome erster Ordnung $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und λ_4 in der Form

$$L_\xi^{(n[e,f,v],I,p)} = R_{m_1}(p, \lambda_1)R_{m_2}(p, \lambda_2)R_{m_3}(p, \lambda_3)R_{m_4}(p, \lambda_4) \tag{3.62}$$

unter Verwendung der vier Modalindizes $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = p$ angegeben werden [66]. Dabei sind die Hilfspolynome $R_m(p, \lambda)$ vom Grad $m > 0$ in λ mit $R_0(p, \lambda) = 1$ zur Erzeugung eines Satzes von Ansatzfunktionen des Funktionenraumes $\mathcal{P}^{(p)}$ definiert als

$$R_m(p, \lambda) = \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\lambda - \frac{k}{p}}{\frac{m}{p} - \frac{k}{p}} \right), \tag{3.63}$$

wobei $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$. Somit kann die Lagrange-Basis theoretisch für beliebige Ordnungen p angegeben werden. Es gilt zwar offensichtlich $\mathcal{P}^{(p)} \subset \mathcal{P}^{(p+1)}$, jedoch müssen beim

Funktionenraum	Dimension	Bedingung	Assoziation
$\overline{\mathcal{P}}_e^{(p)}$	6	$p \geq 2$	Kante (i, j)
$\overline{\mathcal{P}}_f^{(p)}$	$4(p - 2)$	$p \geq 3$	Fläche (i, j, k)
$\overline{\mathcal{P}}_v^{(p)}$	$(p - 3)$	$p \geq 4$	Volumen (i, j, k, l)

Tabelle 3.5: Dimension der inkrementellen Funktionenräume in Abhängigkeit der Ordnung p des Tetraeders zusammen mit der Zuordnung zu Gitterelementen, die durch die Indizes i, j, k und l der definierenden Eckpunkte gegeben sind.

Übergang von p zu $p + 1$ alle $n_{\text{Knoten}}(p)$ Ansatzfunktionen neu bestimmt werden. Dies legt die Wahl einer alternativen Darstellung des Funktionenraums über eine andere Basis nahe.

Zur Bestimmung einer solchen hierarchischen Basis wird der Funktionenraum $\mathcal{P}^{(p)}$ in vier Unterräume bezüglich der Gitterelemente n , e , f und v , auf welchen die Knoten platziert sind, gemäß

$$\mathcal{P}^{(p)} = \mathcal{P}_n^{(p)} \oplus \mathcal{P}_e^{(p)} \oplus \mathcal{P}_f^{(p)} \oplus \mathcal{P}_v^{(p)} \quad (3.64)$$

zerlegt [64]. Während der Raum der Knotenfunktionen $\mathcal{P}_n^{(p)} = \mathcal{P}_n^{(1)}$ unabhängig von der gewünschten Ordnung p ist, werden die übrigen Funktionenräume jeweils rekursiv nach

$$\mathcal{P}_e^{(p)} = \overline{\mathcal{P}}_e^{(2)} \oplus \dots \oplus \overline{\mathcal{P}}_e^{(p)}, p \geq 2, \quad (3.65)$$

$$\mathcal{P}_f^{(p)} = \overline{\mathcal{P}}_f^{(3)} \oplus \dots \oplus \overline{\mathcal{P}}_f^{(p)}, p \geq 3, \quad (3.66)$$

$$\mathcal{P}_v^{(p)} = \overline{\mathcal{P}}_v^{(4)} \oplus \dots \oplus \overline{\mathcal{P}}_v^{(p)}, p \geq 4, \quad (3.67)$$

über die jeweiligen inkrementellen Funktionenräume $\overline{\mathcal{P}}_{e,f,v}^{(p)}$ aufgebaut. Die Dimension dieser Räume ergibt sich aus der Konvention zur Anordnung zusätzlicher Stützstellen in Tabelle 3.3. Aus den in Tabelle 3.5 ersichtlichen Werten für die Dimension folgt die Anzahl notwendiger zusätzlicher Funktionen, die linear unabhängig von den bestehenden Ansatzfunktionen der Räume niedrigerer Ordnung gewählt sein müssen. Diese Forderung kann allgemein unter Verwendung der Bildungsvorschriften

$$L_{i,j}^{(e,H,2)} = \lambda_i \lambda_j P_{p-2}(\lambda_i, \lambda_j) \quad (3.68)$$

$$L_{i,j,k}^{(f,H,2)} = \lambda_i \lambda_j \lambda_k P_{p-3}(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) \quad (3.69)$$

$$L_{1,2,3,4}^{(v,H,2)} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 P_{p-4}(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k, \lambda_l) \quad (3.70)$$

mit Polynomen P_m vom Grad m in $\lambda_{1\dots 4}$ erfüllt werden [68]. Dabei bleiben die Kantenfunktionen stets mit der durch das Indexpaar (i, j) charakterisierten Kante und die Flächenfunktionen mit der durch das Indextripel (i, j, k) bezeichneten Fläche assoziiert. Die Volumenfunktionen verschwinden auf der gesamten Berandung des Elements und sind

immer mit allen Eckpunkten verbunden. Bei der Wahl der Form dieser Polynome bestehen zahlreiche Freiheitsgrade, insbesondere bei höherer Ordnung. Mögliche Kriterien, anhand derer eine explizite Darstellung erhalten werden kann, lauten:

- Konformität der Ansatzfunktionen zu anderen Simplexformen im Hinblick auf gemischte Gitter [68, 69];
- Konformität an Grenzen zwischen einzelnen Elementen der selben Gitterklasse [70];
- Teilweise oder vollständige Orthogonalität zwischen den einzelnen Ansatzfunktionen auf dem Referenzelement [71, 72, 73].

An den genannten Literaturstellen sind die entsprechenden hierarchischen Ansatzfunktionen für verschiedene Elementtypen bis zu einer bestimmten maximalen Ordnung angegeben, wobei zum Teil auch allgemeine rekursive Bildungsvorschriften aufgeführt sind.

Der Vorteil bei der Verwendung hierarchischer Ansätze besteht in der Flexibilität bei der Wahl der Ordnung innerhalb verschiedener, aneinandergrenzender Elemente. Während bei einer rein interpolatorischen Basis im Fall unterschiedlicher Ordnung in benachbarten Elementen die Konformität explizit erzwungen werden muss, kann dies bei der Verwendung einer hierarchischen Basis durch die separate Ausblendung der mit der höheren Ordnung assoziierten Koeffizienten geschehen. Hierarchische Ansatzfunktionen bilden die Grundlage der sogenannten p - und hp -Versionen der Methode der Finiten Elemente [74, 75].

3.2.2 Vektorielle Ansatzfunktionen für Felder

Durch die im vorherigen Abschnitt eingeführten Ansatzfunktionen können skalare physikalische Größen auf konsistente Art und Weise auf der Gitterebene dargestellt werden. Ein möglicher Ansatz zur Approximation vektorieller Zielgrößen besteht in der Verwendung einer skalaren Funktion nach Abschnitt 3.2.1 für jede Komponente des Vektorfeldes. Von dieser Möglichkeit wurde sowohl bei der Lösung von Eigenwertproblemen in einer elektrischen oder magnetischen Feld-Formulierung als auch bei der Bestimmung von Wirbelströmen in Verbindung mit dem magnetischen Vektorpotential Gebrauch gemacht [76, 32, 77]. Da durch diesen Ansatz, entgegen der aus den Maxwellschen Gleichungen resultierenden spezifischen Anforderungen an die Feld- und Flussgrößen, die Stetigkeit jeder einzelnen Komponente über die Element- und Materialgrenzen hinweg erzwungen wird, entstehen unphysikalische Lösungen [78, 79]. Insbesondere bei der Simulation zeitlich schnell veränderlicher Felder sowie bei der Berechnung von Eigenmoden in Wellenleiterstrukturen stellte diese Tatsache ein erhebliches Problem dar, das beispielsweise durch Sicherstellung der erforderlichen reduzierten Stetigkeit an Materialsprünge mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren oder durch das Erzwingen der Divergenzfreiheit der Flussgrößen auf Formulierungsebene

teilweise gelöst wurde [80, 81]. Eine weitere, nach ihrer Einführung nahezu ausschließlich verfolgte, Alternative besteht in der Sicherstellung der geforderten Stetigkeitsbedingungen auf Diskretisierungsebene in Form angepasster Ansatzfunktionen gemäß Tabelle 3.2. Dies stellt eine natürliche, wenngleich nicht zwingend notwendige, Wahl der Freiheitsgrade bei der Approximation unter Verwendung der Methode der Finiten Elemente dar. Anhand der aufgeführten Eigenschaften werden für die physikalischen Größen entsprechende Funktionenräume mit den geforderten reduzierten Stetigkeitseigenschaften definiert. Mit den gewonnenen Erkenntnissen über die notwendigen Eigenschaften der Approximationsräume besteht auch in Verbindung mit skalaren Ansatzfunktionen die Möglichkeit zur Definition konformer Verfahren [82, 83], die jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt wird.

Aufgrund der Stetigkeitsanforderungen darf kein vollständig linearer Ansatz, der in diesem Fall den Raum der linearen Polynome in den Vektorkomponenten beschreibt, verwendet werden [84]. Um die elektrische und magnetische Feldstärke konsistent über Ansatzfunktionen darzustellen, kommen *tangential stetige vektorielle Ansatzfunktionen* zum Einsatz. Im Fall niedrigster Ordnung weisen diese Funktionen eine konstante Tangentialkomponente auf und die gesuchte Feldstärke wird gemäß

$$\vec{K}(x, y, z) = \sum_{\xi} k_{\xi} \vec{w}_{\xi}^{\text{tv},(0)}(x, y, z) \quad (3.71)$$

approximiert. Die Ansatzfunktionen $\vec{w}_{\xi}^{\text{tv},(0)}$ sind dabei jeweils einem zu den Eckpunkten des Referenztetraeders \hat{T} gemäß Abbildung 3.11(a) korrespondierenden Indexpaar (i, j) assoziiert. Zur Konstruktion einer interpolatorischen Basis niedrigster Ordnung wird von einem Interpolationspolynom, das die einzelnen Komponenten des Vektorfeldes \vec{K} beschreibt, ausgegangen. Zur Herleitung wird die gesuchte Ansatzfunktion zunächst einer Helmholtz-Zerlegung in einen rotationsfreien sowie einen divergenzfreien Teil gemäß

$$\vec{w}_{\xi}^{\text{tv},(0)} = \vec{w}_{\xi, \text{grad}}^{\text{tv},(0)} + \vec{w}_{\xi, \text{rot}}^{\text{tv},(0)} \quad (3.72)$$

unterworfen. Das gesuchte Interpolationspolynom ergibt sich damit als Überlagerung getrennter Ansätze für die beiden Anteile. Der von den Funktionen $\vec{w}_{\xi, \text{grad}}^{\text{tv},(p)}$ aufgespannte Funktionenraum $\mathcal{P}_{\text{tv,grad}}^{(p)}$ geht gemäß

$$\mathcal{P}_{\text{tv,grad}}^{(p)} = \nabla \mathcal{P}_{\text{n}}^{(p+1)} \quad (3.73)$$

durch Bildung des Gradienten aus dem entsprechenden skalaren Funktionenraum zur Ordnung $p + 1$ hervor. Es gilt daher

$$\dim \left\{ \mathcal{P}_{\text{tv,grad}}^{(p)} \right\} = \dim \left\{ \mathcal{P}_{\text{n}}^{(p+1)} \right\} - 1. \quad (3.74)$$

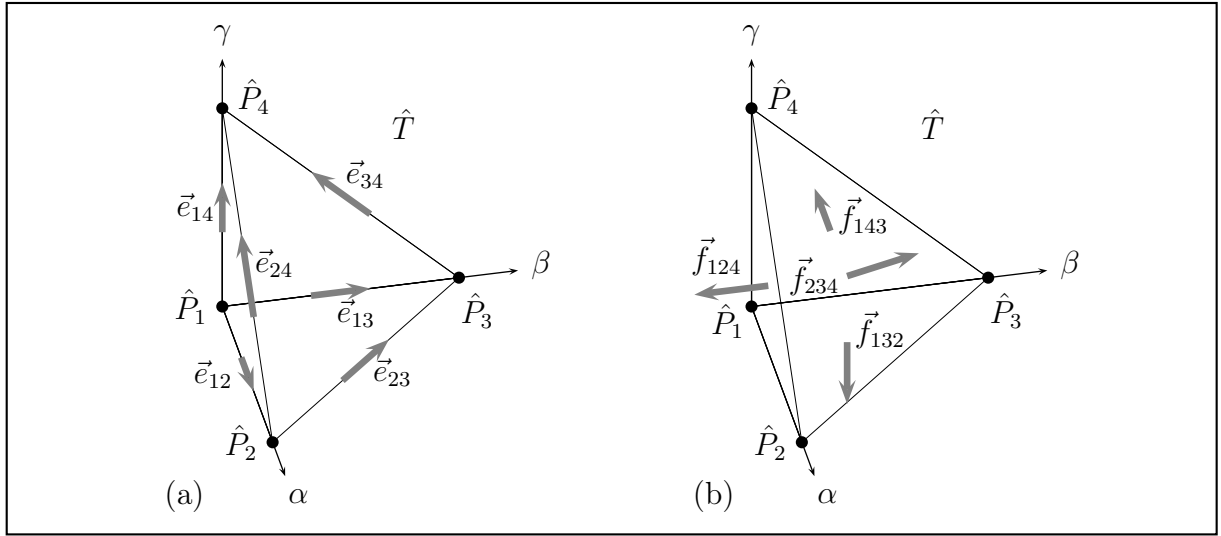


Abbildung 3.11: Referenztetraeder zur Definition der Orientierung und Indizierung der bei der Konstruktion vektorieller Ansatzfunktionen erforderlichen Gitterelemente: (a) Kanten und (b) Flächen.

Das Interpolationspolynom für den Fall niedrigster Ordnung mit $p = 0$ besteht damit aus je einem konstanten Koeffizienten in den Koordinatenrichtungen. Der zugehörige Raum $\mathcal{P}_{\text{tv,grad}}^{(0)}$ besitzt die Dimension drei.

Entsprechend spannen die Funktionen $\vec{w}_{\xi,\text{rot}}^{\text{tv},(p)}$ in Gleichung (3.72) einen weiteren Funktionenraum $\mathcal{P}_{\text{tv,rot}}^{(p)}$ auf. Dieser umfasst Vektorfunktionen, deren Rotation mit Polynomen der Ordnung p approximiert wird. Eine Basis für den zu dem skalaren Raum mit derselben Ordnung $p = 0$ passenden Funktionenraum der Dimension drei kann über die Interpolationspolynome

$$\vec{w}_{\xi,\text{rot}}^{\text{tv},(0)} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

beschrieben werden [85]. Es kann leicht gezeigt werden, dass $\nabla \times \vec{w}_{\xi,\text{rot}}^{\text{tv},(0)} = 2(d, e, f)^T$ sowie $\nabla \cdot \vec{w}_{\xi,\text{rot}}^{\text{tv},(0)} = 0$ gilt. Unter der Voraussetzung der Divergenzfreiheit des Ansatzes für $\mathcal{P}_{\text{tv,rot}}^{(0)}$ in Gleichung (3.75) und aufgrund der Konstruktion des zugehörigen skalaren Funktionenraumes $\mathcal{P}_{\text{tv,grad}}^{(p)}$ sind die beiden Räume disjunkt. Somit kann

$$\vec{w}_{\xi,\text{rot}}^{\text{tv},(0)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

als Ansatz zur Konstruktion einer gemeinsamen Basis für $\mathcal{P}_{\text{tv}}^{(0)}$ verwendet werden. Die

einzelnen Ansatzfunktionen interpolieren die tangentielle Komponente der gesuchten Vektorfunktion \vec{K} . Unter der Vorgabe einer konstanten Tangentialkomponente entlang der zugeordneten Kante (i, j) sowie verschwindender entlang der übrigen Kanten entstehen sechs Gleichungssysteme in den Koeffizienten aus Gleichung (3.76). Als deren Lösungen ergeben sich die häufig auch als **Kantenelemente** bezeichneten Vektorfunktionen

$$\vec{w}_{i,j}^{\text{tv},(0)} = \lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i \quad (3.77)$$

mit $(i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ gemäß Abbildung 3.11(a) unter Verwendung der skalaren linearen Interpolationspolynome $\lambda_{1\dots 4}$ [61, 86, 62, 87]. Dieser Begriff wird jedoch im weiteren nicht verwendet, da eine Verwechslungsgefahr mit den im skalaren Fall höherer Ordnung eingeführten Kantenfunktionen besteht. Stattdessen werden die Funktionen in Gleichung (3.77) aufgrund ihrer Stetigkeitseigenschaften als tangential stetige vektorielle Ansatzfunktionen bezeichnet.

Der durch Gleichung (3.76) für den Fall $p = 0$ beschriebene Ansatz auf der Basis einer Helmholtz-Zerlegung kann für höhere Ordnungen verallgemeinert werden. Die entsprechenden Ansatzfunktionen zur Darstellung der Funktionenräume $\mathcal{P}_{\text{tv,grad}}^{(p)}$ und $\mathcal{P}_{\text{tv,rot}}^{(p)}$ werden dazu separat aufgestellt und in einem gemeinsamen Interpolationspolynom zusammengefasst. Für diese Polynome $\vec{w}_{\xi,\text{grad}}^{\text{tv},(p)}$ gilt aufgrund der Konstruktionsvorschrift in Gleichung (3.73) $\nabla \times \vec{w}_{\xi,\text{grad}}^{\text{tv},(p)} = 0$. Diese wichtige Eigenschaft sichert die Konsistenz der Approximation. Für den Funktionenraum $\mathcal{P}_{\text{tv,rot}}^{(p)}$ wird analog zu Gleichung (3.75) der Ansatz

$$\vec{w}_{\xi,\text{rot}}^{\text{tv},(p)} = \begin{pmatrix} s_{\alpha}^{(p)}(\alpha, \beta, \gamma) \\ s_{\beta}^{(p)}(\alpha, \beta, \gamma) \\ s_{\gamma}^{(p)}(\alpha, \beta, \gamma) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

mit allgemeinen Polynomen $s_{\alpha}^{(p)}, s_{\beta}^{(p)}$ und $s_{\gamma}^{(p)}$ aus $\mathcal{P}_s^{(p)}$ aufgestellt. Aufgrund der ebenfalls essentiellen Forderung $\nabla \cdot \vec{w}_{\xi,\text{rot}}^{\text{tv},(p)} = 0$ folgt eine weitere Einschränkung der Koeffizienten. Um diese Bedingung zu erfüllen, können die Koeffizienten innerhalb von $p(p+1)(p+2)/6$ Tripeln nicht unabhängig voneinander gewählt werden, so dass sich die Anzahl an Freiheitsgraden entsprechend reduziert. Mit dieser Einschränkung beträgt die Dimension des Funktionenraums $\mathcal{P}_{\text{tv,rot}}^{(p)}$

$$\dim \left\{ \mathcal{P}_{\text{tv,rot}}^{(p)} \right\} = 3 \dim \left\{ \mathcal{P}_s^{(p)} \right\} - \frac{1}{6} p(p+1)(p+2). \quad (3.79)$$

Für die Rotation der entsprechenden Polynome in Gleichung (3.78) kann, in Verbindung mit deren Divergenzfreiheit, unter Verwendung vektoranalytischer Umformungen gezeigt

werden, dass

$$\nabla \times \vec{w}_{\xi, \text{rot}}^{\text{tv}, (p)} = 3 \begin{pmatrix} s_{\alpha}^{(p)} \\ s_{\beta}^{(p)} \\ s_{\gamma}^{(p)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

gilt, wobei k_1, k_2 und k_3 die zu den Monomen der Ordnung 0 gehörigen Koeffizienten der komponentenweise angeordneten Polynome bezeichnen. Für den zugehörigen Gradientenraum $\mathcal{P}_{\text{tv}, \text{grad}}^{(p)}$ kann entsprechend der Ansatz

$$\vec{w}_{\xi, \text{grad}}^{\text{tv}, (p)} = \nabla s^{(p+1)} \quad (3.81)$$

zur Bestimmung von Interpolationspolynomen verwendet werden. Offensichtlich gilt aufgrund der Konstruktion auf diese Weise $\nabla \times \vec{w}_{\xi, \text{grad}}^{\text{tv}, (p)} = 0$. Als Dimension des Funktionenraumes zur Darstellung von Funktionen, die vollständig zur Ordnung p sowohl in ihrer Rotation als auch in ihrem Gradienten sind, ergibt sich somit unter Berücksichtigung von Gleichung (3.74) sowie Gleichung (3.79)

$$\begin{aligned} \dim \left\{ \mathcal{P}_{\text{tv}}^{(p)} \right\} &= \dim \left\{ \mathcal{P}_{\text{tv}, \text{grad}}^{(p)} \right\} + \dim \left\{ \mathcal{P}_{\text{tv}, \text{rot}}^{(p)} \right\} \\ &= \frac{1}{2}(p+1)(p+3)(p+4). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Die Bestimmung einer Basis für den Funktionenraum $\mathcal{P}_{\text{tv}}^{(p)}$ kann sowohl hierarchisch getrennt für die beiden Teilräume erfolgen oder über den direkten interpolatorischen Ansatz, der durch die Interpolationspolynome in Gleichung (3.78) sowie Gleichung (3.81) gegeben ist. Explizite Darstellungen für die entsprechenden Ansatzfunktionen, auch zur direkten Konstruktion als Lagrange- beziehungsweise Sylvester-Lagrange-Basis, sind bekannt [88]. Bei der hierarchischen Konstruktion bestehen, wie bereits im skalaren Fall für den Potentialraum, zahlreiche Freiheitsgrade. Daher existiert eine große Zahl verschiedener sowie teilweise übereinstimmender Darstellungen für derartige Ansatzfunktionen [71, 72, 73, 64].

3.2.3 Vektorielle Ansatzfunktionen für Flüsse

Für den Fall zu approximierender Flussgrößen bietet sich eine weitere Klasse vektorieller Ansatzfunktionen an. Im Gegensatz zu den bisher Beschriebenen weisen sie lediglich eine Stetigkeit entlang der Normalen der jeweiligen assoziierten Fläche des Tetraeders in Abbildung 3.11(b) auf. Sie werden daher im Folgenden als **normal stetige vektorielle Ansatzfunktionen** bezeichnet. Unter Verwendung dieser Ansatzfunktionen kann ein Vektorfeld $\vec{K}(x, y, z)$ gemäß

$$\vec{K}(x, y, z) = \sum_{\xi} k_{\xi} \vec{w}_{\xi}^{\text{nv}, (0)}(x, y, z) \quad (3.83)$$

approximiert werden. Der Index ξ bezieht sich auf eines der Knotenindextripel $(i, j, k) \in \{(1, 2, 4), (1, 3, 2), (1, 4, 3), (2, 3, 4)\}$ gemäß Abbildung 3.11(b). Im Fall niedrigster Ordnung $p = 0$ beschreiben die Interpolationspolynome

$$\vec{w}_{\xi}^{\text{nv},(0)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

eine Basis des zugehörigen Funktionenraumes $\mathcal{P}_{\text{nv}}^{(0)}$, der hier die Dimension vier besitzt. Entsprechend werden die Freiheitsgrade als Approximation der Normalkomponente des Vektorfeldes \vec{K} auf den jeweiligen Flächen des Tetraeders interpretiert. Diese Komponente ist auf der mit der Ansatzfunktion assoziierten Fläche mit den Knotenindizes i, j und k konstant und verschwindet auf dem übrigen Rand des Simplex. Über diesen Ansatz können die Koeffizienten in Gleichung (3.84) bestimmt werden. Die Ansatzfunktionen ergeben sich damit zu

$$\vec{w}_{i,j,k}^{\text{nv},(0)} = 2 (\lambda_i \nabla \lambda_j \times \nabla \lambda_k + \lambda_j \nabla \lambda_k \times \nabla \lambda_i + \lambda_k \nabla \lambda_i \times \nabla \lambda_j) \quad (3.85)$$

für jedes der vier Indextripel [63]. Der Ansatz in Gleichung (3.85) kann für höhere Ordnung p verallgemeinert werden. Dazu werden die Vektorfunktionen $\vec{w}_{i,j,k}^{\text{nv},(p)}$ im Rahmen einer Helmholtz-Zerlegung in einen quellenfreien sowie einen rotationsfreien Teil gemäß

$$\vec{w}_{\xi}^{\text{nv},(p)} = \vec{w}_{\xi,\text{rot}}^{\text{nv},(p)} + \vec{w}_{\xi,\text{div}}^{\text{nv},(p)} \quad (3.86)$$

aufgespalten. Eine solche getrennte Betrachtung ist notwendig, um die Konformität der Approximation sicherzustellen. Aufgrund der in die Konstruktion des Funktionenraums $\mathcal{P}_{\text{tv,rot}}^{(p)}$ eingeflossenen Eigenschaften kann dieser zur Modellierung des Nullraums des Divergenzoperators eingesetzt werden und es gilt

$$\mathcal{P}_{\text{nv,rot}}^{(p)} = \nabla \times \mathcal{P}_{\text{tv,rot}}^{(p+1)}. \quad (3.87)$$

Die darin enthaltenen Funktionen gehören zu der Klasse von Polynomen mit einer vollständigen Ordnung p in ihrer Rotation. Dazu passend wird ein Funktionenraum $\mathcal{P}_{\text{nv,div}}^{(p)}$ konstruiert, der alle rotationsfreien Funktionen, deren Divergenz zur vollständigen Ordnung p approximiert wird, umfasst. Die Konstruktionsvorschrift für entsprechende Interpolationpolynome lautet

$$\vec{w}_{\xi,\text{div}}^{\text{nv},(p)} = \nabla ((\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) s^{(p)}) \quad (3.88)$$

mit skalaren Polynomen $s^{(p)}(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{P}_s^{(p)}$ der für die Divergenz gewünschten Ordnung p . Es gilt damit offensichtlich $\nabla \times \vec{w}_{\xi,\text{div}}^{\text{nv},(p)} = 0$. Vektoranalytische Umformungen liefern zusätzlich $\nabla \cdot \vec{w}_{\xi,\text{div}}^{\text{nv},(p)} = 10s^{(p)} - 4s_0$, wobei s_0 das Absolutglied des Polynoms $s^{(p)}$ repräsentiert.

Für die Dimension des Funktionenraums $\mathcal{P}_{\text{nv,div}}^{(p)}$ gilt somit

$$\dim \left\{ \mathcal{P}_{\text{nv,div}}^{(p)} \right\} = \dim \left\{ \mathcal{P}_s^{(p)} \right\}. \quad (3.89)$$

Da die Funktionenräume $\mathcal{P}_{\text{nv,div}}^{(p)}$ und $\mathcal{P}_{\text{nv,rot}}^{(p)}$ nach Konstruktion disjunkt sind, kann der Gesamttraum $\mathcal{P}_{\text{nv}}^{(p)}$ durch eine direkte Summe aufgebaut werden. Dessen Dimension ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \dim \left\{ \mathcal{P}_{\text{nv}}^{(p)} \right\} &= \dim \left\{ \mathcal{P}_{\text{nv,rot}}^{(p)} \right\} + \dim \left\{ \mathcal{P}_{\text{nv,div}}^{(p)} \right\} \\ &= \frac{1}{2}(p+1)(p+2)(p+4). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Eine entsprechende Anzahl an Koeffizienten zur interpolatorischen Konstruktion einer Basis bietet ein Polynom, das aus der Verknüpfung von Gleichung (3.78) mit Gleichung (3.88) entsteht. Es lautet

$$\vec{w}_{\xi}^{\text{nv},(p)} = \begin{pmatrix} s_{\alpha}^{(p)}(\alpha, \beta, \gamma) \\ s_{\beta}^{(p)}(\alpha, \beta, \gamma) \\ s_{\gamma}^{(p)}(\alpha, \beta, \gamma) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \nabla \left((\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) s^{(p)} \right). \quad (3.91)$$

Dabei muss beachtet werden, dass im Ansatz für $\vec{w}_{\xi,\text{rot}}^{\text{nv},(p)}$, wie bereits im Zusammenhang mit der Konstruktion einer Basis für $\mathcal{P}_{\text{tv,rot}}^{(p)}$ erwähnt, die Anzahl an Koeffizienten zur Sicherstellung der Divergenzfreiheit entsprechend zu reduzieren ist. Wie auch bei den übrigen vorgestellten Klassen von Ansatzfunktionen, können auch die normal stetigen Vektorfunktionen zu einer gegebenen Approximationsordnung hierarchisch konstruiert werden [64, 89].

3.2.4 Skalare Ansatzfunktionen für Ladungsverteilungen

Als hinsichtlich der unterschiedlichen Stetigkeitsanforderungen verbleibende Klasse physikalischer Größen stellen sich Ladungsverteilungen dar. Diese unterliegen bei der Approximation unter Verwendung von Ansatzfunktionen im Gegensatz zu Potential-, Feld- und Flussgrößen keiner spezifischen Einschränkung bezüglich ihrer Stetigkeit. Daher erfolgt die Darstellung auf der Ebene des Gitters über skalare Funktionen $w_{\xi}^{\text{ch},(p)}$ (engl. „charge“), die nur innerhalb eines Tetraeders von Null verschiedene Werte annehmen, gemäß

$$k(x, y, z) = \sum_{\xi} k_{\xi} w_{\xi}^{\text{ch},(p)}(x, y, z). \quad (3.92)$$

Diese Art von Ansatzfunktionen ist stets mit allen Eckpunkten des Tetraeders assoziiert. Für den Fall niedrigster Ordnung existiert lediglich eine Funktion $w_1^{\text{ch},(0)}$. Sie beschreibt

eine Konstante der Größe des inversen Volumens des Referenz- beziehungsweise, nach einer Transformation, des globalen Tetraeders T . Der zugehörige Funktionenraum $\mathcal{P}_{\text{ch}}^{(p)}$ besteht aus Polynomen zur vollständigen Ordnung p innerhalb des Tetraeders, die auf dem Rand den Wert 0 annehmen. Dieser geht durch Divergenzbildung aus dem Funktionenraum $\mathcal{P}_{\text{nv,div}}^{(p+1)}$ der normal stetigen Funktionen hervor. Für die Dimension gilt dementsprechend

$$\dim \left\{ \mathcal{P}_{\text{ch}}^{(p)} \right\} = \dim \left\{ \nabla \cdot \mathcal{P}_{\text{nv,div}}^{(p+1)} \right\} = \dim \left\{ \mathcal{P}_{\text{s}}^{(p)} \right\}. \quad (3.93)$$

Die Konstruktion einer Basis kann über einen interpolatorischen oder hierarchischen Weg erfolgen. In ersterem Fall werden entsprechend der Dimension in Gleichung (3.93) zusätzliche Stützstellen innerhalb des Volumens des Tetraeders plziert. Die Freiheitsgrade stellen den Wert der gesuchten Funktion k am Ort der Stützstelle dar. Analog zu den zuvor betrachteten Funktionenräumen ergibt sich durch Einsetzen der Interpolationsbedingungen ein Gleichungssystem in den benötigten Koeffizienten. Dessen jeweilige Lösung liefert die gesuchten interpolatorischen Ansatzfunktionen zur Darstellung von Ladungsverteilungen. Explizite Konstruktionsvorschriften für ein hierarchisches Vorgehen stehen ebenfalls zur Verfügung [64].

3.2.5 Schwache Formulierung

Die Methode der Finiten Elemente wird zur Lösung partieller Differentialgleichungen eingesetzt. Im Unterschied zur Methode der Finiten Integration in Abschnitt 3.1, bilden jedoch die Maxwell'schen Gleichungen in Differentialform gemäß der Gleichungen (2.1) bis (2.4) den Ausgangspunkt der Betrachtung. Diese stellen ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung dar. Unter Verwendung der in Abschnitt 2.3 vorgestellten Ergebnisse ergeben sich für die einzelnen quasistatischen Grenzfälle entsprechende Formulierungen auf der Basis von Skalar- oder Vektorpotentialen. Diese stellen jeweils partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Raum und maximal erster Ordnung in der Zeit dar. Bei den folgenden Ausführungen wird jedoch die zeitliche Variation zunächst nicht betrachtet. Für die somit verbleibende Klasse stationärer Gleichungen ist eine allgemeine Form durch

$$\mathcal{L}u = f \quad (3.94)$$

mit dem Differentialoperator \mathcal{L} in der Variablen u und der rechten Seite f gegeben. Diese Schreibweise wird auch als **starke Formulierung** der Randwertaufgabe bezeichnet. Zusammen mit passend gewählten Randbedingungen ist damit ein wohlgestelltes Problem gegeben [36]. Allerdings können nur in selten Fällen analytische Lösungen zu dieser Problemstellung angegeben werden. Zum Zweck einer Diskretisierung unter Verwendung der

in den vorherigen Abschnitten vorgestellten, lediglich stückweise stetigen Ansatzfunktionen, müssen die zugrundeliegenden Differentialgleichungen so umgeformt werden, dass nur noch einfache räumliche Ableitungen auftreten. Der erste Schritt besteht dabei in einer Relaxation der starken Formulierung. Dazu existieren verschiedene Ansätze:

- Aufstellen einer Variationsformulierung unter Verwendung eines Funktionals;
- Herleitung einer schwachen Formulierung über gewichtete Residuen.

Das Lösungsverfahren für die erstgenannte Möglichkeit wird als **Rayleigh-Ritz-Verfahren** bezeichnet und basiert auf der Suche eines stationären Punktes des aufgestellten Funktionals [90]. Die zweite Klasse von Verfahren zur Aufstellung der schwachen Formulierung fällt unter den Oberbegriff der **Petrov-Galerkin-Verfahren**. Allgemein entsteht für eine approximative Lösung u_a zu Gleichung (3.94) ein Residuum

$$R = \mathcal{L}u_a - f, \quad (3.95)$$

das durch Multiplikation mit Testfunktionen w_t und anschließender Integration über das betrachtete Volumen in einem gemittelten Sinne zum Verschwinden gebracht wird. Entsprechende Unterklassen von Petrov-Galerkin-Verfahren sind durch die Wahl der Testfunktionen w_t gegeben. Werden die zur Approximation der Variablen u eingesetzten Ansatzfunktionen ebenfalls als Testfunktionen verwendet, ergibt sich die in der Praxis am häufigsten vorkommende Klasse der **Galerkin-Verfahren**. Von **Kollokationsmethoden** spricht man beim Einsatz Diracscher Deltafunktionen als Testfunktionen, da das Residuum R punktweise zu Null gebracht wird. Da im Fall selbstadjungierter Differentialoperatoren \mathcal{L} die entstehende diskrete Formulierung mit der aus dem Variationsansatz resultierenden übereinstimmt, ist auch der Begriff **Ritz-Galerkin-Verfahren** gebräuchlich [67]. Im folgenden wird dieses Verfahren exemplarisch für den Fall zu approximierender skalarer sowie vektorieller Größen eingesetzt.

Skalare Formulierung

Als Beispiel für skalare Formulierungen wird hier von der durch Gleichung (2.37) gegebenen Poisson-Gleichung der Elektrostatik unter Verwendung des (totalen) elektrischen Skalarpotentials ϕ ausgegangen. Im ladungsfreien Raum vereinfacht sich diese zur Laplace-Gleichung

$$-\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = 0. \quad (3.96)$$

Als Randbedingung wird die tangentielle elektrische Feldstärke auf dem Teil Γ_d des Randes in Form einer homogenen Dirichlet-Bedingung an das elektrische Skalarpotential $\phi_d = 0$ vorgegeben. Auf dem Teil Γ_n besteht eine unter Umständen inhomogene Neumann-Randbedingung. Diese beschreibt die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte auf

dem Rand des betrachteten Gebiets. Zur Approximation des elektrischen Skalarpotentials sollen die in Abschnitt 3.2.1 eingeführten sowie auf einem entsprechenden Gitter definierten skalaren Ansatzfunktionen w_i^s zum Einsatz kommen. Im Rahmen des hier betrachteten Galerkin-Verfahrens werden diese auch als Testfunktionen $w_{i'}^s$ zur Minimierung des Residuums verwendet. Die zur schwachen Formulierung von Gleichung (3.96) führende Darstellung lautet damit

$$-\int_V (\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) w_{i'}^s) dV = 0 \quad (3.97)$$

unter Verzicht auf die Bezeichnung der Ordnung p der Testfunktionen im Sinne einer besseren Lesbarkeit des Ausdrucks. Durch verallgemeinerte partielle Integration und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes folgt

$$\int_V (\varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla w_{i'}^s) dV - \int_{\partial V} (D_n w_{i'}^s) dA = 0 \quad (3.98)$$

mit der Normalkomponente $D_n = \varepsilon \nabla \phi \cdot \vec{n}$ der elektrischen Flussdichte auf dem Rand ∂V_Ω des betrachteten Volumens. Gleichung (3.98) wird als die zu Gleichung (3.96) gehörige schwache Formulierung bezeichnet. Damit wird deutlich, dass eine homogene Neumann-Randbedingung an die elektrische Flussdichte die natürliche Randbedingung in dieser Formulierung darstellt. Zur Erfüllung der homogenen Dirichlet-Randbedingung auf Γ_d müssen die Testfunktionen so gewählt werden, dass sie an den entsprechenden Punkten auf dem Rand verschwinden.

Vektorielle Formulierung

Stellvertretend für elektromagnetische Formulierungen in vektoriellen Größen wird die durch Gleichung (2.44) gegebene magnetostatische Formulierung unter Verwendung des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} in der Coulomb-Eichung betrachtet. Auf dem Anteil Γ_d der Berandung wird eine homogene Dirichlet-Bedingung an das magnetische Vektorpotential gesetzt, welche für eine verschwindende Normalkomponente der magnetischen Flussdichte sorgt. Entsprechend bezieht sich eine Neumann-Bedingung am Rand Γ_n auf die tangential magnetische Feldstärke. Als Ansatzfunktionen sollen die in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen tangential stetigen Vektorfunktionen $\vec{w}_k^{\text{tv},(p)}$ verwendet werden. Diese werden gleichzeitig auch als Testfunktionen $\vec{w}_{k'}^{\text{tv},(p)}$ im Rahmen des Galerkin-Verfahrens eingesetzt. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit wird im folgenden auf die Bezeichnung der Ordnung p verzichtet. Der Ausgangspunkt zur Herleitung einer schwachen Formulierung ist durch

$$\int_V \left(\left(\nabla \times \left(\nu \nabla \times \vec{A} \right) \right) \cdot \vec{w}_{k'}^{\text{tv}} \right) dV = \int_V \left(\vec{J}_e \cdot \vec{w}_{k'}^{\text{tv}} \right) dV \quad (3.99)$$

gegeben. Partielle Integration in verallgemeinerter Form und anschließende Anwendung des Gaußschen Integralsatzes führt zu der zugehörigen schwachen Formulierung

$$\int_V \left((\nu \nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{w}_{k'}^{\text{tv}}) \right) dV - \int_{\partial V} \left((\vec{H} \times \vec{n}) \cdot \vec{w}_{k'}^{\text{tv}} \right) dA = \int_V \left(\vec{J}_e \cdot \vec{w}_{k'}^{\text{tv}} \right) dV \quad (3.100)$$

wobei die Tangentialkomponente $\vec{H} \times \vec{n}$ der magnetische Feldstärke $\vec{H} = \nu \nabla \times \vec{A}$ als natürliche Randbedingung in dieser Formulierung in dem Randintegralterm erscheint. Entsprechend müssen die Testfunktionen zur Erfüllung der Dirichlet-Randbedingung auf Γ_d passend gewählt werden.

3.2.6 Diskretisierung unter Verwendung von Ansatzfunktionen

Da in den exemplarisch hergeleiteten schwachen Formulierungen lediglich räumliche Ableitungen erster Ordnung vorkommen, können stückweise stetige Ansatzfunktionen zur Diskretisierung der entsprechenden Größen eingesetzt werden. Die Diskretisierung der schwachen Formulierungen kann elementweise erfolgen, da die Ansatzfunktionen einen kompakten, auf das jeweilige Element beschränkten, Träger aufweisen. Eine anschließende Summation über die Beiträge der einzelnen Elemente führt zur globalen Diskretisierung.

Skalare elektrostatische Formulierung

Für den Fall der elektrostatischen Formulierung stellt das elektrische Skalarpotential ϕ die gesuchte Größe dar. In der globalen Approximation unter Verwendung der skalaren Ansatzfunktionen w_ξ^s für Potentialgrößen lautet die entsprechende Darstellung

$$\phi \approx \sum_{\xi} u_{\xi} w_{\xi}^s \quad (3.101)$$

mit den unbekannten Koeffizienten u_{ξ} , die als Komponenten eines Vektors \mathbf{u} angeordnet werden. Das Einsetzen der globalen Approximation in die schwache Formulierung führt zu einem Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{K}_{\varepsilon}^s \mathbf{u} - \mathbf{g}_{\varepsilon}^s = 0 \quad (3.102)$$

mit der aus historischen Gründen als Steifigkeitsmatrix bezeichneten Koeffizientenmatrix $\mathbf{K}_{\varepsilon}^s$ und dem zu dem Randintegral in Gleichung (3.98) korrespondierenden Vektor $\mathbf{g}_{\varepsilon}^s$. Die Einträge der Matrix sowie des Vektor können aufgrund des kompakten Trägers der Ansatzfunktionen elementweise bestimmt werden. Zur Herleitung des Beitrags eines einzelnen Elements wird das Integral über das gesamte betrachtete Volumen V_{Ω} in Gleichung (3.98)

auf das Elementvolumen V_e^e mit $\sum_{e=1}^T V_e^e = V_\Omega$ eingeschränkt. Die globale Darstellung ergibt sich damit gemäß

$$\mathbf{K}_\varepsilon^s = \sum_{e=1}^T \mathbf{Q}_e^T \mathbf{K}_\varepsilon^{s,e} \mathbf{Q}_e, \quad (3.103)$$

$$\mathbf{g}_\varepsilon^s = \sum_{e=1}^T \mathbf{Q}_e^T \mathbf{g}_\varepsilon^{s,e} \quad (3.104)$$

aus der Addition der einzelnen Beiträge. Dabei stellen die Selektionsoperatoren \mathbf{Q}_e dünn-besetzte ganzzahlige Matrizen dar, welche aus den globalen Freiheitsgraden $\{u_\xi\}$ die mit dem Tetraeder T_e assoziierte Untermenge $\{u_i\}$ auswählen. Die Einträge der lokalen Elementmatrizen $\mathbf{K}_\varepsilon^{s,e}$ und -vektoren $\mathbf{g}_\varepsilon^{s,e}$ lauten

$$(\mathbf{K}_\varepsilon^{s,e})_{i,i'} = \int_{V_e^e} (\nabla w_i^s \cdot \varepsilon_e \cdot \nabla w_{i'}^s) dV \quad (3.105)$$

$$(\mathbf{g}_\varepsilon^{s,e})_{i'} = \int_{\partial V_e^e \cap \partial V_\Omega} (D_n w_{i'}^s) dA. \quad (3.106)$$

Das Integral zur Bestimmung des Vektors $\mathbf{g}_\varepsilon^{s,e}$ muss nur ausgewertet werden, wenn das Tetraeder T_e mindestens eine Fläche mit dem Rand des betrachteten Volumens gemeinsam hat. Von Null verschiedene Werte ergeben sich im Fall inhomogener Neumann-Randbedingungen. Die Auswertung der Integrale kann anhand der Transformation g auf dem Referenzelement mit Hilfe analytischer Integration oder numerischer Quadratur erfolgen. Die Matrix \mathbf{K}_ε^s ist im Fall des Galerkin-Verfahrens aufgrund der Kommutativität des Skalarproduktes in Verbindung mit dem zugrundeliegenden Differentialoperator symmetrisch positiv definit.

Vektorielle magnetostatische Formulierung

Zur Approximation des magnetischen Vektorpotentials innerhalb der schwachen Formulierung in Gleichung (3.100) werden die in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen, tangential stetigen vektoriellen Ansatzfunktionen \vec{w}_ξ^{tv} eingesetzt. Die globale Approximation lautet damit

$$\vec{A} \approx \sum_{\xi} a_\xi \vec{w}_\xi^{\text{tv}}, \quad (3.107)$$

wobei die gesuchten Koeffizienten a_ξ in dem Vektor \mathbf{a} zusammengefasst werden. Durch Einsetzen in die schwache Formulierung (3.100) entsteht das Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_\nu^{\text{tv}} \mathbf{a} - \mathbf{g}_\nu^{\text{tv}} = \mathbf{j}_e^{\text{tv}} \quad (3.108)$$

mit dem zu dem Randintegral über die tangentielle magnetische Feldstärke gehörigen Vektor $\mathbf{g}_\nu^{\text{tv}}$ und dem zu der gewichteten eingepprägten Stromdichte korrespondierenden Vektor \mathbf{j}_e^{tv} . Wiederum ist es zulässig, die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_\nu^{\text{tv}}$ sowie die beiden Vektoren $\mathbf{g}_\nu^{\text{tv}}$ und \mathbf{j}_e^{tv} durch die Summation der Beiträge der einzelnen Elemente gemäß

$$\mathbf{K}_\nu^{\text{tv}} = \sum_{e=1}^T \mathbf{Q}_e^T \mathbf{K}_\nu^{\text{tv},e} \mathbf{Q}_e, \quad (3.109)$$

$$\mathbf{g}_\nu^{\text{tv}} = \sum_{e=1}^T \mathbf{Q}_e^T \mathbf{g}_\nu^{\text{tv},e}, \quad (3.110)$$

$$\mathbf{j}_e^{\text{tv}} = \sum_{e=1}^T \mathbf{Q}_e^T \mathbf{j}_e^{\text{tv},e}, \quad (3.111)$$

aufzubauen. In diesem Fall erfolgt die Auswahl der mit dem Element T_e assoziierten Untermenge $\{a_k\}$ aus der Menge aller Freiheitsgrade $\{a_\xi\}$ über die Selektionsoperatoren \mathbf{Q}_e . Die Einträge der lokalen Elementmatrix sowie der Elementvektoren sind durch

$$(\mathbf{K}_\nu^{\text{tv},e})_{k,k'} = \int_{V_e^e} (\nabla \times \vec{w}_k^{\text{tv}} \cdot \nu_e \cdot \nabla \times \vec{w}_{k'}^{\text{tv}}) dV, \quad (3.112)$$

$$(\mathbf{g}_\nu^{\text{tv},e})_{k'} = \int_{\partial V_e^e \cap \partial V_\Omega} \left((\vec{H} \times \vec{n}) \cdot \vec{w}_{k'}^{\text{tv}} \right) dA, \quad (3.113)$$

$$(\mathbf{j}_e^{\text{tv},e})_{k'} = \int_{V_e^e} (\vec{J}_e \cdot \vec{w}_{k'}^{\text{tv}}) dV \quad (3.114)$$

bestimmt. Von Null verschiedene Einträge im Vektor $\mathbf{g}_\nu^{\text{tv},e}$ können bei inhomogenen Neumann-Randbedingungen auftreten. Diese sind in diesem Fall mit den am Rand des betrachteten Volumens V_Ω liegenden Tetraedern T_e assoziiert. Der Vektor $\mathbf{j}_e^{\text{tv},e}$ enthält die Projektion der eingepprägten Stromdichte \vec{J}_e auf die entsprechenden Ansatzfunktionen innerhalb des Elements. Aufgrund des nicht trivialen Nullraums des Rotationsoperators ist die Matrix $\mathbf{K}_\nu^{\text{tv}}$ zwar ebenfalls symmetrisch, jedoch lediglich positiv semidefinit.

Vektorielle magnetoquasistatische Formulierung

Für den Fall der magnetoquasistatischen Formulierung in Gleichung (2.50) unter Verwendung des modifizierten magnetischen Vektorpotentials \vec{A}^* muss die schwache Formulierung in Gleichung (3.100) lediglich um einen Term bezüglich der endlichen Leitfähigkeit σ erweitert werden. Zusätzlich sind die auftretenden vektoriellen Größen nun als zeitabhängig zu betrachten. Als Testfunktionen kommen dieselben vektoriellen Ansatzfunktionen mit tangentialer Stetigkeit $\vec{w}_{k'}^{\text{tv}}$ zum Einsatz. Der Ausgangspunkt der schwachen Formulierung

lautet damit

$$\int_V \left(\left(\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}^*) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^* \right) \cdot \vec{w}_{k'}^{\text{tv}} \right) dV = \int_V \left(\vec{J}_e \cdot \vec{w}_{k'}^{\text{tv}} \right) dV. \quad (3.115)$$

Die zugehörige schwache Formulierung ist somit, unter Ersetzen von \vec{A} durch \vec{A}^* , durch Gleichung (3.100) in Verbindung mit dem zusätzlichen additiven Term

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left((\sigma \vec{A}^*) \cdot \vec{w}_{k'}^{\text{tv}} \right) dV \quad (3.116)$$

definiert. Eine Diskretisierung unter Verwendung der Ansatzfunktionen \vec{w}_k^{tv} führt in der Folge zu einem Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{K}_\nu^{\text{tv}} \mathbf{a} + \mathbf{M}_\sigma^{\text{tv}} \frac{d}{dt} \mathbf{a} - \mathbf{g}_\nu^{\text{tv}} = \mathbf{j}_e^{\text{tv}}, \quad (3.117)$$

wobei der Vektor der Unbekannten \mathbf{a} nun die Koeffizienten a_ξ der Approximation des modifizierten magnetischen Vektorpotentials enthält. Auf eine Unterscheidung anhand zusätzlicher Indizierung wird an dieser Stelle verzichtet, da die Art des magnetischen Vektorpotentials aus dem Kontext der Formulierung eindeutig ist. Während die Größen $\mathbf{K}_\nu^{\text{tv}}$, $\mathbf{g}_\nu^{\text{tv}}$ und \mathbf{j}_e^{tv} durch die Gleichungen (3.109) bis (3.114) bestimmt sind, ergibt sich analog für den, ebenfalls aus historischen Gründen, als Massenmatrix¹ bezeichneten Term $\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv}}$ die Darstellung

$$\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv}} = \sum_{e=1}^T \mathbf{Q}_e^T \mathbf{M}_\sigma^{\text{tv},e} \mathbf{Q}_e, \quad (3.118)$$

$$(\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv},e})_{k,k'} = \int_{V_e^e} (\vec{w}_k^{\text{tv}} \cdot \sigma_e \cdot \vec{w}_{k'}^{\text{tv}}) dV. \quad (3.119)$$

In Abwesenheit nicht leitfähiger Gebiete ist die Matrix $\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv}}$ symmetrisch positiv definit, anderenfalls singulär aufgrund der in diesem Fall entstehenden Nullzeilen beziehungsweise -spalten.

¹Im allgemeinen strukturdynamischen Fall ergibt sich die semidiskrete Darstellung $\mathbf{M}\mathbf{u}'' + \mathbf{D}\mathbf{u}' + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ mit der Massenmatrix \mathbf{M} , der Dämpfungsmatrix \mathbf{D} , der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} sowie dem Anregungsvektor \mathbf{f} . Da im vorliegenden elektrodynamischen Fall die Admittanzmatrix mit der ersten zeitlichen Ableitung assoziiert ist, müsste die korrekte Bezeichnung für $\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv}}$ gemäß der mechanischen Analogie Dämpfungsmatrix lauten. Vom Standpunkt der Bildung der Einträge über innere Produkte der Ansatzfunktionen sind Massen- und Dämpfungsmatrizen jedoch sehr ähnlich. Da weiterhin im Rahmen dieser Arbeit aufgrund der quasistatischen Approximation keine Terme in Verbindung mit der zweiten zeitlichen Ableitung auftreten, wird im folgenden dennoch der Begriff Massenmatrix verwendet.

3.3 Spektralverfahren

3.3.1 Überblick

Während die in den vorangegangenen Abschnitten 3.1 und 3.2 behandelten Methoden auf einer lokalen Approximation der gesuchten Größe anhand einer räumlichen Diskretisierung zur Lösung partieller Differentialgleichungen basieren, beinhalten Spektralverfahren eine globale Approximation. Klassische Varianten gehören zu einer der Untergruppen [91]:

- Galerkin-Verfahren;
- Galerkin-Verfahren in Verbindung mit numerischer Integration;
- Tau-Verfahren;
- Kollokationsverfahren.

Diese Verfahren können vorteilhaft und effizient im Fall einfacher Geometrien auf Tensorprodukt-Gittern² eingesetzt werden. Die Galerkin-artigen Verfahren basieren dabei, wie auch innerhalb der Methode der Finiten Elemente, auf der schwachen Formulierung einer durch eine partielle Differentialgleichung gegebenen Aufgabenstellung. Es wird lediglich auf eine Unterteilung in kleine Untergebiete verzichtet. Vielmehr erfolgt die Approximation simultan auf dem gesamten betrachteten Gebiet. Da die globalen Randbedingungen bei dieser Klasse von Methoden daher sowohl durch die Test- als auch durch die Ansatzfunktionen erfüllt sein müssen, gestaltet sich diese Methode komplizierter als entsprechende Finite-Elemente-Verfahren. Diese Restriktion wird im Rahmen der Tau-Verfahren gelockert, da in diesem Fall die Randbedingungen durch separate Behandlung unter Einführung zusätzlicher Gleichungen eingebracht werden. Kollokationsverfahren fallen ebenfalls in den Bereich gewichteter Residuenmethoden. Da jedoch als Testfunktionen gemäß der Kollokationspunkte verschobene Diracsche Delta-Distributionen eingesetzt werden, handelt es sich formal um Petrov-Galerkin-Verfahren. Entsprechende Methoden werden auch als **Pseudo-Spektralverfahren** bezeichnet [92]. Wird der globale Charakter der Approximation aufgegeben, erschließt sich eine weitere Klasse pseudospektraler Verfahren, die als DG-Methoden (engl. „*Discontinuous Galerkin*“) bekannt sind und unter anderem bei der Simulation fluiddynamischer und elektromagnetischer Vorgänge eingesetzt werden [93, 94].

²Ein Tensorprodukt-Gitter ist durch die Multiplikation separater räumlicher Diskretisierungen in unterschiedlichen Koordinatenrichtungen gegeben. Für die spätere Anwendung im Rahmen dieser Arbeit kommt der Spezialfall eines Gitters in einer zweidimensionalen Ebene in Verbindung mit einer angepassten Diskretisierung in der verbleibenden Richtung zum Einsatz.

3.3.2 Methode der spektralen Kollokation

Die klassische, auf einfache Gebiete beschränkte, Methode eignet sich zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Sie wird jedoch meist nur zur räumlichen Diskretisierung eingesetzt [91]. Im folgenden sei die Lösung des eindimensionalen Problems

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u = f(x) \quad (3.120)$$

auf dem beschränkten Intervall $[-1, 1]$ gesucht. Andere in der Praxis vorkommende Grenzen können durch eine Koordinatentransformation auf dieses Intervall projiziert werden. Als Grundlage dient, wie bei allgemeinen Finite-Elemente-Methoden, eine Approximation der gesuchten Größe u über ein Interpolationspolynom gemäß

$$u(x) \approx p(x) = \sum_q a_q P_q(x) \quad (3.121)$$

unter Verwendung entsprechender Funktionen $P_q(x)$. Im Unterschied zu lokalen Verfahren, wie der Methode der Finiten Elemente, ist diese Approximation jedoch global auf dem gesamten Intervall gültig. Durch Einsetzen von Gleichung (3.121) in die zugrundeliegende Differentialgleichung (3.120) entsteht im allgemeinen ein von Null verschiedenes Residuum

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x) - f(x). \quad (3.122)$$

Kollokationsmethoden, als gewichtete Residuenverfahren, bringen durch Multiplikation mit verschobenen Delta-Distributionen als Testfunktionen und anschließender Integration über das Intervall das Residuum an N Punkten zum Verschwinden. Somit wird die starke Formulierung in Gleichung (3.120) an diesen Stützstellen exakt erfüllt. Abhängig von den gegebenen Randbedingungen beziehungsweise vorhandener Periodizität und Symmetrie bieten sich unterschiedliche Funktionsräume zur Entwicklung an. Im folgenden werden drei dahingehend verschiedene Kollokationsverfahren betrachtet.

Fourier-Kollokation

Im Fall periodischer Randbedingungen beziehungsweise periodischer Koordinaten wird das Intervall mit äquidistanter Schrittweite an den Stützstellen x_k abgetastet. Die Entwicklung in Gleichung (3.121) erfolgt in Form harmonischer Funktionen gemäß

$$P_q(x) = e^{i2\pi qx}. \quad (3.123)$$

Damit ist das Interpolationspolynom über seine Funktionswerte $p(x_k)$ an den Stützstellen x_k eindeutig bestimmt. Die entsprechenden Gleichungen, die zur Bestimmung der Koeffizienten a_q führen, sind durch

$$p(x_k) = \sum_{q=-N/2}^{N/2-1} a_q e^{i2\pi qx_k} \quad (3.124)$$

für die aus der Abtastung resultierenden N Punkte gegeben. Sind diese Koeffizienten bekannt, so kann die kontinuierliche Interpolationsfunktion

$$p(x) = \sum_{q=-N/2}^{N/2-1} a_q e^{i2\pi qx} \quad (3.125)$$

angegeben werden. Die Entwicklungskoeffizienten a_q in Gleichung (3.124) können auch direkt über die Diskrete Fouriertransformation (DFT) aus den Abtastwerten $p(x_k)$ in der Form

$$a_q = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} p(x_k) e^{-i2\pi qx_k} \quad (3.126)$$

bestimmt werden. Damit stellt Gleichung (3.124) die inverse Diskrete Fouriertransformation (iDFT) dar. Durch Einsetzen von Gleichung (3.126) in Gleichung (3.125) folgt eine Darstellung des Interpolationspolynoms in der Kardinalbasis $C_k(x)$ [91]. Deren Darstellung bei einer ungeraden Anzahl $N = 2m + 1$ äquidistanter Stützstellen $x_k = k/(m + 1/2)$ lautet

$$C_k(x) = \frac{\sin(N\pi(x - x_k)/2)}{N \sin(\pi(x - x_k)/2)} \quad (3.127)$$

für jede der Stützstellen x_k . Sie weisen die folgenden, zur Definition einer Interpolationsbasis nützlichen Eigenschaften auf:

- Die Funktionen C_k stellen trigonometrische Polynome mit einer $[-1, 1]$ -Periodizität dar;
- Es gilt $C_k(x) = 1$ für $x = x_k$ und $C_k(x) = 0$ für $x = x_j, j \neq k$.

In Abbildung 3.12 ist die zu $N = 15$ und $k = 2$ korrespondierende Kardinalfunktion C_2 auf dem Intervall $[-1, 1]$ dargestellt. Unter Verwendung dieser Basis ist die Approximation $p(x)$ der Lösung u , ähnlich zur Lagrange-Darstellung bei regulären Polynomen auf nicht periodischen Intervallen, durch

$$u(x) \approx p(x) = \sum_{k=-m}^m u(x_k) C_k(x) \quad (3.128)$$

gegeben. Die zugehörige Kollokationsmethode basiert auf der analytischen Differentiation der trigonometrischen Interpolation in Gleichung (3.121) und anschließender Auswertung in den äquidistant auf dem Intervall verteilten Abtastpunkten x_k . Dieser Vorgang kann in Form einer Differentiationsmatrix $\mathbf{D}_F^{(1)}$ mit den Einträgen

$$\left(\mathbf{D}_F^{(1)}\right)_{k,j} = \begin{cases} \frac{\pi(-1)^{k-j}}{2 \sin(\pi(k-j)/N)} & \text{für } k \neq j \\ 0 & \text{für } k = j \end{cases} \quad (3.129)$$

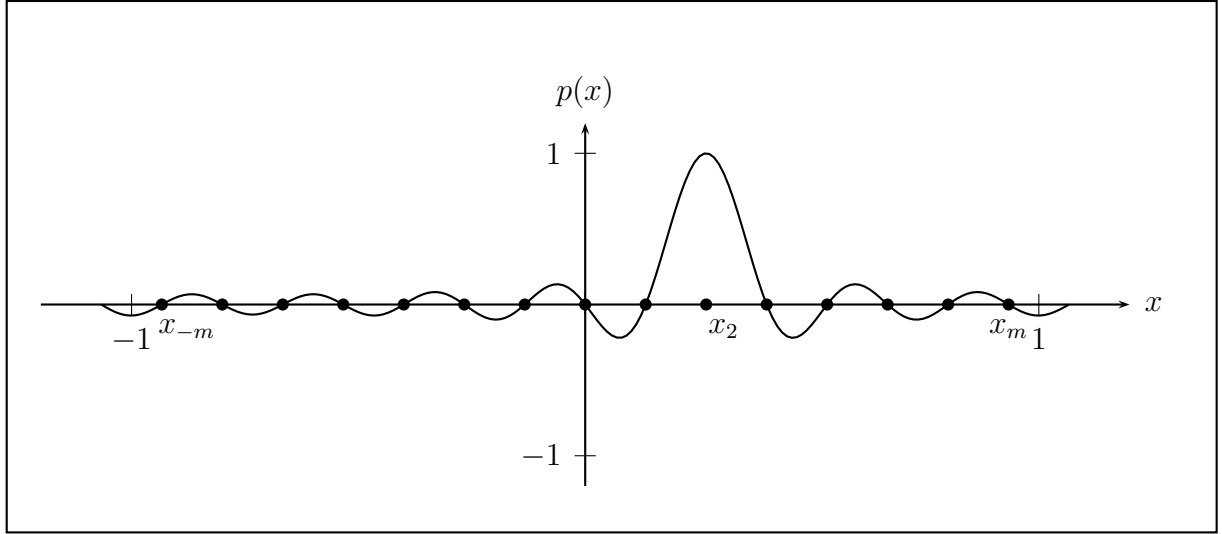


Abbildung 3.12: Trigonometrische Kardinalfunktion $C_2(x)$ für $N = 15$ und $m = 7$.

formuliert werden [92]. Sie verknüpft die Werte der gesuchten Funktion u an den Stützstellen mit der ersten Ableitung des Interpolationspolynoms am selben Ort. Eine Differenzationsmatrix $\mathbf{D}_F^{(2)}$ für die zweite Ableitung entsteht analog durch weiteres Differenzieren des Approximationspolynoms in Gleichung (3.127). Zusammen mit der Auswertung der Anregungsfunktion $f(x)$ an den Stützstellen x_k steht damit ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{D}_F^{(2)} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.130)$$

mit den Werten $u_k = u(x_k)$ im Vektor \mathbf{u} und der rechten Seite \mathbf{f} mit den Einträgen $f_k = f(x_k)$ für die Beschreibung der Lösung von Gleichung (3.120) zur Verfügung. In diesem Fall spricht man auch von **Fourier-Spektralmethoden** [95]. Aufgrund der an dieser Stelle vorausgesetzten Periodizität der Lösung ist kein Auftreten des Gibbs-Phänomens zu erwarten. Das Konvergenzverhalten des beschriebenen Verfahrens hängt von der Differenzierbarkeit der Lösung ab. Spektrale Konvergenz ist bei beliebig oft stetig differenzierbaren Lösungsfunktionen zu erwarten. Die Summationen in Gleichung (3.124) und Gleichung (3.126) können auch unter Verwendung der schnellen Fouriertransformation (engl. „*Fast Fourier Transform*“, FFT) ausgeführt werden. Insbesondere bei einer hohen Anzahl an Abtastpunkten N erweist sich dabei die geringere Komplexität des Algorithmus bezüglich des numerischen Aufwands als vorteilhaft. Aufgrund der beschriebenen Zusammenhänge ist die Betrachtung der Interpolation auf der Basis der Abtastwerte an den Stützstellen sowie der Entwicklungskoeffizienten des Interpolationspolynoms äquivalent. Vor allem im Fall nichtlinearer Differentialgleichungen muss während einer Fixpunkt-Iteration häufig zwischen den beiden Darstellungsformen gewechselt werden [95]. Dies ist bei der Verwendung entsprechender FFT-Algorithmen besonders effizient möglich.

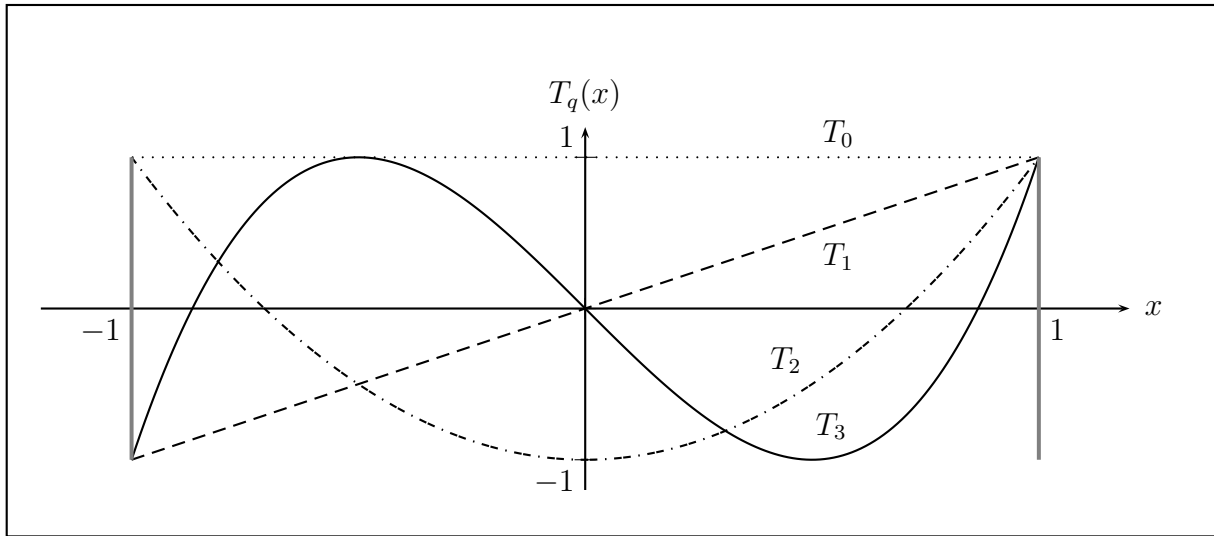


Abbildung 3.13: Tschebyscheff-Polynome $T_q(x)$ für $q \in \{0, 1, 2, 3\}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$.

Tschebyscheff-Kollokation

In Abwesenheit einer Periodizität in den Funktionswerten stellt eine Entwicklung der gesuchten Funktion in Form einer Summe von Tschebyscheff-Polynomen $T_q(x)$ die beste Wahl dar. Unter der Normierung $T_q(1) = 1$ sind die Tschebyscheff-Polynome erster Art durch die Rekursionsvorschrift

$$T_q(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } q = 0 \\ x & \text{für } q = 1 \\ 2xT_{q-1}(x) - T_{q-2}(x) & \text{für } q \geq 2 \end{cases} \quad (3.131)$$

gegeben. Sie stellen eine orthogonale Basis des Funktionenraums der Monome unter der Gewichtsfunktion $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ dar. Der Verlauf der ersten vier Polynome ist in Abbildung 3.13 dargestellt. Durch die Substitution $x = \cos \theta$ wird die Verwandtschaft der Tschebyscheff-Polynome zu trigonometrischen Funktionen deutlich. Es ergibt sich $T_q(x) = \cos q\theta$ mit $\theta = \arccos x$ [91]. Im Gegensatz zu Fourier-Kollokationsmethoden sollte keine äquidistante Verteilung der Stützstellen verwendet werden, um das Runge-Phänomen zu vermeiden [95]. Stattdessen kommen Knotenverteilungen zum Einsatz, die eine in Richtung der beiden Rändern des Intervalls dichtere Anordnung aufweisen (engl. „*node clustering*“). Meist werden zur Kollokation unter Verwendung von $N + 1$ Knoten die Tschebyscheff-Gauß-Lobatto-Punkte

$$x_k = -\cos\left(\frac{\pi k}{N}\right) \quad (3.132)$$

eingesetzt. Sie stellen die Extrema des Tschebyscheff-Polynoms T_N einschließlich der Rand-

punkte des Intervalls dar. An diesen Stützstellen x_k wird gemäß des Kollokationsansatzes die starke Form der zugrundeliegenden Differentialgleichung exakt erfüllt. Die Entwicklungskoeffizienten der Tschebyscheff-Polynome zur Darstellung des Interpolationspolynoms $p(x)$ können anhand dieser Punkte durch die Gleichungen

$$p(x_k) = \sum_{q=0}^N a_q T_q(x_k) \quad (3.133)$$

bestimmt werden. Da ein Polynom vom exakten Grad N durch die Vorgabe von $N+1$ Werten eindeutig gegeben ist, kann die Bestimmung äquivalent in der zugehörigen Lagrange-Basis erfolgen. Durch Differentiation des Interpolationspolynoms und Auswertung an den Stützstellen ergeben sich die Einträge der Differentiationsmatrix $\mathbf{D}_C^{(1)}$ zu

$$\left(\mathbf{D}_C^{(1)}\right)_{k,j} = \begin{cases} \frac{2N^2+1}{6} & \text{für } k = j = 0, N \\ \frac{-x_k}{2(1-x_k^2)} & \text{für } k = j = 1, \dots, N-1, \\ \frac{c_k}{c_j} \frac{(-1)^{j+k}}{x_k - x_j} & \text{für } k \neq j \end{cases} \quad (3.134)$$

wobei $c_k = 2$ für $k \in \{0, N\}$ und anderenfalls $c_k = 1$ gilt [96]. Die Auswertung der Ableitung des Interpolationspolynoms in Lagrange-Form kann effizient über Rekursionsformeln erfolgen [92]. Ausdrücke für Ableitungen höherer Ordnung folgen aus der p -fachen Anwendung der Matrix $\mathbf{D}_C^{(1)}$ gemäß

$$\mathbf{D}_C^{(p)} = \left(\mathbf{D}_C^{(1)}\right)^p. \quad (3.135)$$

Aufgrund der angegebenen Verwandtschaft der Tschebyscheff-Polynome zu trigonometrischen Funktionen kann die Bestimmung eines Interpolationspolynoms auch analog zu Fourier-Kollokationsmethoden erfolgen. Mit der Koordinatentransformation $x = \cos \theta$ entsprechen die Entwicklungskoeffizienten denjenigen einer trigonometrischen Kosinusreihe

$$p(\cos \theta) = \sum_{q=0}^N a_q \cos(q\theta). \quad (3.136)$$

Damit besteht auch die Möglichkeit einer Darstellung der Entwicklungskoeffizienten a_q mittels der diskreten Kosinustransformation (engl. „Discrete Cosine Transform“, DCT) gemäß

$$a_q = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N p(\cos(\theta_k)) \cos(q\theta_k) \quad (3.137)$$

in Analogie zu Gleichung (3.126). Dabei müssen sowohl in Gleichung (3.136) als auch in Gleichung (3.137) der erste sowie der letzte Summand mit dem Faktor $1/2$ multipliziert

werden [95]. Die notwendigen Summationen können unter Verwendung einer angepassten FFT besonders effizient ausgeführt werden. Wiederum ist die Darstellung der Methode im Koeffizientenraum der $\{a_q\}$ und äquivalent im Raum der Abtastgrößen $\{p(x_k)\}$ an den Kollokationspunkten x_k möglich. Daraus ergibt sich jeweils eine unterschiedliche Vorgehensweise bezüglich der Differentiation. Diese kann im Koeffizientenraum unter Verwendung der Rekursionsvorschrift für die Ableitungen der Tschebyscheff-Polynome

$$2T_q = \frac{1}{q+1} \frac{d}{dx} T_{q+1} - \frac{1}{q-1} \frac{d}{dx} T_{q-1} \quad (3.138)$$

unter anschließender Rücktransformation in den Raum der Abtastgrößen erfolgen [92]. Das Lösungsverfahren ist in diesem Fall dem der Fourier-Kollokation sehr ähnlich mit dem Unterschied, dass nicht periodische Funktionen auf dem beschränkten Intervall $[-1, 1]$ dargestellt werden können.

Legendre-Kollokation

Die ebenfalls zur Familie der orthogonalen Jacobi-Polynome zählenden Legendre-Funktionen sind zur Approximation nicht periodischer Funktionen auf dem Einheitsintervall geeignet. Sie stellen das Ergebnis einer Gram-Schmidt-Orthogonalisierung des Raumes der Monome unter der Gewichtsfunktion $\rho(x) = 1$ dar. Im Unterschied zu Tschebyscheff-Polynomen besteht keine Analogie zu trigonometrischen Funktionen. Als Vorteil der Legendre-Polynome kann jedoch deren Orthogonalität unter dem herkömmlichen Skalarprodukt gesehen werden. Diese Tatsache tritt insbesondere in Verbindung mit der Kopplung zu anderen Diskretisierungsverfahren vorteilhaft zu Tage. Die Approximationsvorschrift in Gleichung (3.121) für die gesuchten Lösungsfunktion $u(x)$ wird im Rahmen der Legendre-Kollokation mit den Legendre-Polynomen $L_q = P_q$ formuliert. Diese sind rekursiv über

$$L_q(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } q = 0 \\ x & \text{für } q = 1 \\ \frac{2q+1}{q+1} x L_{q-1}(x) - \frac{q}{q+1} L_{q-2}(x) & \text{für } q \geq 2 \end{cases} \quad (3.139)$$

auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert. In Abbildung 3.14 ist der Verlauf der Polynome für einige Ordnungen $q \geq 2$ angegeben. Die Darstellung für $q < 2$ stimmt mit derjenigen der Tschebyscheff-Polynome in Abbildung 3.13 überein. Im Vergleich mit diesen verlaufen die Legendre-Polynome flacher im Inneren des Intervalls und der Betrag ihrer Extrema ist dort kleiner als eins. Als Kollokationspunkte x_k kommen meist die Legendre-Gauß-Lobatto-Punkte zum Einsatz, welche die Extrema des Polynoms L_N sowie die Randpunkte des Intervalls umfassen. An den Kollokationspunkten wird die starke Formulierung in Gleichung (3.120) exakt erfüllt, so dass aufgrund der Interpolationsbedingung für das

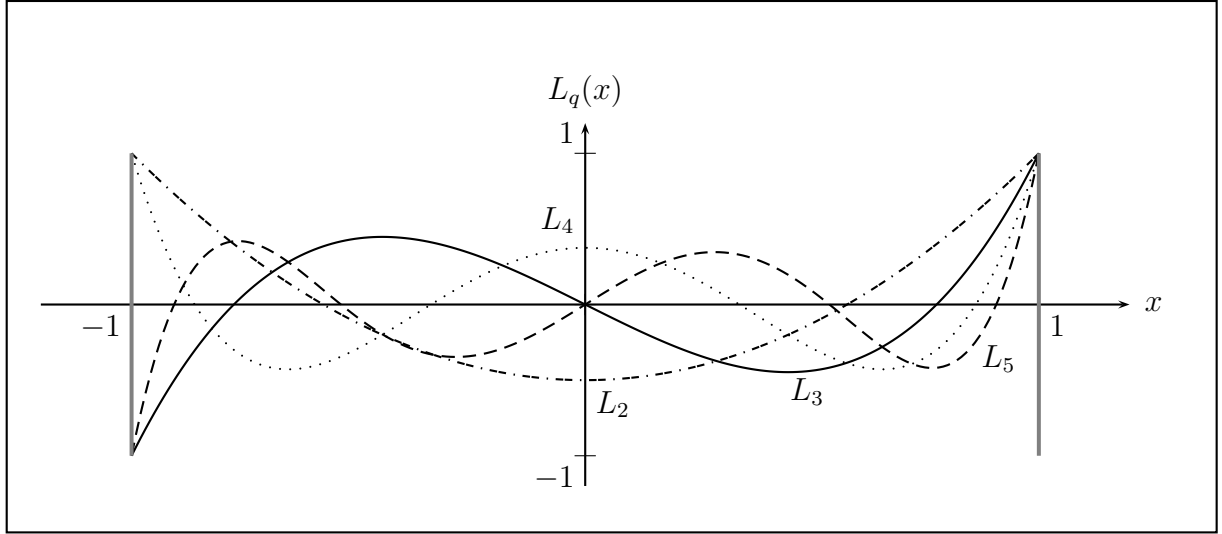


Abbildung 3.14: Legendre-Polynome $L_q(x)$ für $q \in \{2, 3, 4, 5\}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Es gilt $L_0 = T_0$ und $L_1 = T_1$.

zugehörige Polynom die Darstellung

$$p(x_k) = \sum_{q=0}^N a_q L_q(x_k) \quad (3.140)$$

gilt. Durch Ableitung des durch diese Punkte gegebenen Lagrange-Interpolationspolynoms nach x kann eine Differentiationsmatrix $\mathbf{D}_L^{(1)}$ mit den Einträgen

$$\left(\mathbf{D}_L^{(1)}\right)_{k,j} = \begin{cases} \frac{1}{4}N(N+1) & \text{für } k = j = 0 \\ -\frac{1}{4}N(N+1) & \text{für } k = j = N \\ 0 & \text{für } k = j, 1 \dots, N-1 \\ \frac{L_N(x_k)}{L_N(x_j)(x_k - x_j)} & \text{für } k \neq j \end{cases} \quad (3.141)$$

gefunden werden. Höhere Ableitungen werden analog zu Gleichung (3.135) bestimmt, so dass sich die punktweise Lösung der Differentialgleichung aus der Matrixdarstellung in Gleichung (3.130) unter Ersetzung der Differentiationsmatrix $\mathbf{D}_F^{(2)}$ durch $\mathbf{D}_L^{(2)}$ und entsprechender Interpretation der vorkommenden Vektoren an den Stützstellen x_k ergibt. Auch wenn in diesem Fall keine schnelle Umrechnung zwischen der Darstellung im Koeffizienten- und Abstraum unter Verwendung diskreter trigonometrischer Transformationen möglich ist, kann die Darstellung dennoch im Koeffizientenraum erfolgen. Die Differentiation kann dort mithilfe der Rekursionsvorschrift

$$(2q+1)L_q = \frac{d}{dx}L_{q+1} - \frac{d}{dx}L_{q-1} \quad (3.142)$$

durchgeführt werden [92]. Aufgrund der erwähnten Einschränkung ist, insbesondere im Fall nichtlinearer Problemstellungen, die einen häufigen Wechsel zwischen den beiden Darstellungsformen erfordern, die Anwendung von Tschebyscheff-Kollokationsverfahren naheliegender.

3.3.3 Spektrale Galerkin-Verfahren

Bei dieser Klasse spektraler Verfahren wird analog zur Methode der Finiten Elemente vorgegangen. Ausgehend von einer schwachen Formulierung der zugrundeliegenden Problemstellung in Differentialform werden Ansatzfunktionen gewählt, die im Rahmen einer gewichteten Residuenmethode ebenfalls als Testfunktionen eingesetzt werden. Dies bietet insbesondere Vorteile bei der Kopplung unterschiedlicher Diskretisierungsverfahren auf Tensorprodukt-Gittern. An dieser Stelle werden jedoch zunächst lediglich die Grundlagen des Verfahrens anhand des eindimensionalen Falls mit einer homogenen Materialverteilung aufgezeigt. Bei der Wahl der Ansatzfunktionen werden dieselben Kriterien angewandt wie bei den entsprechenden Kollokationsverfahren des vorangegangenen Abschnitts. Typischerweise ergeben sich aus der Diskretisierung von schwachen Formulierungen, wie in Abschnitt 3.2.6 dargestellt, abhängig von der Formulierung und des physikalischen Problems die zugehörigen Steifigkeits- und Massenmatrizen. Für drei unterschiedliche Formen von Ansatzfunktionen, jeweils angepasst an vorab bekannte Symmetrie- und Periodizitätseigenschaften, werden diese im folgenden angegeben.

Trigonometrische Ansatzfunktionen

Für periodische Gebiete beziehungsweise bei vorhandener Periodizität der Lösung kommen trigonometrische Ansatzfunktionen gemäß Gleichung (3.123) zum Einsatz. Werden diese im Rahmen des Galerkin-Verfahrens in konjugiert komplexer Form $P_{q'} = e^{-2\pi i q' x}$ ebenfalls als Testfunktionen eingesetzt, lautet die resultierende schwache Formulierung

$$\int_{-1}^1 \frac{dP_{q'}}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_{-1}^1 f P_{q'} dx. \quad (3.143)$$

Durch Einsetzen der Approximation $p(x)$ für die gesuchte Größe u ergibt sich die spektrale Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\text{SE}}^{\text{F}}$ mit den Einträgen

$$(\mathbf{K}_{\text{SE}}^{\text{F}})_{q,q'} = \int_{-1}^1 \frac{dP_{q'}}{dx} \frac{dP_q}{dx} dx. \quad (3.144)$$

In diesem Fall stellen die Ansatzfunktionen Eigenfunktionen der zugrundeliegenden Differentialgleichung dar. Diese Eigenschaft führt in Verbindung mit der Orthogonalität der

harmonischen Funktionen zu einer Steifigkeitsmatrix, die eine Diagonalgestalt besitzt. Abgesehen vom ersten Element für $q = q' = 0$, das den Wert 0 annimmt, weisen die Diagonalelemente die Werte $2(2\pi q)^2$ auf. Die im Rahmen dieser Formulierung nicht vorkommende Massenmatrix $\mathbf{M}_{\text{SE}}^{\text{F}}$ ist durch

$$(\mathbf{M}_{\text{SE}}^{\text{F}})_{q,q'} = \int_{-1}^1 P_{q'} P_q dx \quad (3.145)$$

bestimmt. Sie ist aufgrund der Orthogonalität der harmonischen Funktionen ebenfalls diagonal und enthält in diesem Fall den Wert zwei für $q = q'$.

Tschebyscheff-Ansatzfunktionen

Im Fall nicht periodischer Problemstellungen bietet eine Entwicklung der Lösung in Form der orthogonalen Tschebyscheff-Polynome T_q gute Approximationseigenschaften. Basierend auf der schwachen Formulierung der zugrundeliegenden Differentialgleichung können auch in diesem Fall entsprechende Steifigkeits- und Massenmatrizen hergeleitet werden. Die Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\text{SE}}^{\text{C}}$ ergeben sich analog zu Gleichung (3.144) gemäß

$$(\mathbf{K}_{\text{SE}}^{\text{C}})_{q,q'} = \int_{-1}^1 \rho(x) \frac{dT_{q'}}{dx} \frac{dT_q}{dx} dx \quad (3.146)$$

mit der Gewichtsfunktion $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Da die zur Entwicklung der Lösung eingesetzten Funktionen in diesem Fall keine Eigenfunktionen der Differentialgleichung darstellen und die Ableitungen der Polynome nicht orthogonal zueinander sind, verliert die resultierende Steifigkeitsmatrix ihre Diagonalgestalt. Aufgrund der Kommutativität des Skalarproduktes bleibt jedoch bei der Verwendung der Galerkin-Methode die Symmetrie erhalten. Zur Bestimmung der Einträge der Steifigkeitsmatrix werden die Koeffizienten der ersten Ableitung der Ansatzfunktionen innerhalb der Entwicklung

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{q=0}^N a_q T_q \right) = \sum_{q=0}^N b_q T_q \quad (3.147)$$

bestimmt. Dies erfolgt durch Einsetzen der Rekursionsbeziehung in Gleichung (3.138) mit anschließendem Koeffizientenvergleich. Dadurch ergibt sich der Zusammenhang

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{SE}}^{\text{C}} \mathbf{b} \quad (3.148)$$

mit der Differentiationsmatrix $\mathbf{F}_{\text{SE}}^{\text{C}}$ im Koeffizientenraum sowie den Spaltenvektoren $\mathbf{a} = \{a_q\}, q = 1 \dots N$ und $\mathbf{b} = \{b_q\}, q = 0 \dots N-1$ [92]. Zur Bestimmung des erforderlichen umgekehrten Zusammenhangs wird zunächst die zweibandige Matrix $\mathbf{F}_{\text{SE}}^{\text{C}}$ invertiert. Durch

Ergänzen entsprechender Zeilen und Spalten korrespondierend zu den Einträgen a_0 und b_N folgt die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ b_N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{F}_{\text{SE}}^{\text{C}})^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}_{\text{SE}}^{\text{C}}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \quad (3.149)$$

für die inverse Verknüpfung. Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\text{SE}}^{\text{C}}$ kann damit über das Matrixtripelprodukt

$$\mathbf{K}_{\text{SE}}^{\text{C}} = (\mathbf{G}_{\text{SE}}^{\text{C}})^{\text{T}} \cdot \mathbf{M}_{\text{SE}}^{\text{C}} \cdot \mathbf{G}_{\text{SE}}^{\text{C}} \quad (3.150)$$

ausgedrückt werden. Dabei ist die Massenmatrix $\mathbf{M}_{\text{SE}}^{\text{C}}$ aufgrund der Orthogonalität der Tschebyscheff-Polynome diagonal und enthält die Orthogonalitätsfaktoren

$$(\mathbf{M}_{\text{SE}}^{\text{C}})_{q,q'} = \int_{-1}^1 \rho(x) T_{q'} T_q dx \quad (3.151)$$

für $q = q'$. Sowohl die auf diese Weise bestimmte Steifigkeits- als auch die Massenmatrix haben die Dimension $N + 1$ entsprechend der Anzahl bei der Approximation verwendeter Tschebyscheff-Polynome.

Legendre-Ansatzfunktionen

Bei der Approximation der Lösungsfunktion durch Legendre-Polynome im Rahmen des Galerkin-Verfahrens kann analog zu der bei einer Tschebyscheff-Diskretisierung angewandten Methode vorgegangen werden. Die Gewichtsfunktion innerhalb des Skalarproduktes lautet in diesem Fall $\rho(x) = 1$. Unter Anwendung der zugehörigen Rekursionsbeziehung für die erste Ableitung in Gleichung (3.142) können ebenso entsprechende Matrixgleichungen hergeleitet werden. Der Aufbau der Steifigkeits- und Massenmatrizen bleibt unverändert, während deren Einträge nunmehr durch

$$(\mathbf{K}_{\text{SE}}^{\text{L}})_{q,q'} = \int_{-1}^1 \frac{dL_{q'}}{dx} \frac{dL_q}{dx} dx, \quad (3.152)$$

$$(\mathbf{M}_{\text{SE}}^{\text{L}})_{q,q'} = \int_{-1}^1 L_{q'} L_q dx \quad (3.153)$$

gegeben sind. Das Matrixtripelprodukt unter Verwendung der aus der Rekursionsbeziehung in Gleichung (3.142) resultierenden Matrix $\mathbf{G}_{\text{SE}}^{\text{L}}$ lautet

$$\mathbf{K}_{\text{SE}}^{\text{L}} = (\mathbf{G}_{\text{SE}}^{\text{L}})^{\text{T}} \cdot \mathbf{M}_{\text{SE}}^{\text{L}} \cdot \mathbf{G}_{\text{SE}}^{\text{L}}. \quad (3.154)$$

Da bei der Verwendung von Legendre-Polynomen keine Beziehung zu trigonometrischen Funktionen wie im Fall der Tschebyscheff-Polynome besteht, ist keine schnelle Fouriertransformation zur Umrechnung vom Koeffizientenraum in den Raum der Abtastwerte an

den Stützstellen einsetzbar. Dennoch bietet die Diskretisierung in Form von Legendre-Ansatzfunktionen Vorteile im Rahmen von Gebietszerlegungsverfahren bei der Kopplung an den Grenzflächen zwischen einzelnen Gebieten, da beidseitig ein Skalarprodukt mit einer Gewichtsfunktion $\rho(x) = 1$ angewandt werden kann.

3.4 Zeitliche Diskretisierung

In den bisherigen Abschnitten wurde lediglich auf die räumliche Diskretisierung mit dem Ziel der numerischen Lösung einer gegebenen Aufgabe eingegangen. Die im Rahmen dieser Arbeit relevanten, zeitlich veränderlichen Problemstellungen resultieren aus der quasistatischen Näherung der Maxwell'schen Gleichungen. Diese Näherung führt zu parabolischen partiellen Differentialgleichungen. Für diese Klasse stellt die sogenannte Linienmethode ein Lösungsverfahren dar, bei dem zunächst die räumliche Diskretisierung ausgeführt wird. Nach deren Anwendung ergibt sich ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen beziehungsweise teilweise algebraischer Gleichungen für die entsprechenden Zustandsgrößen bezüglich der Zeit t . Die zeitliche Diskretisierung erfolgt unter Abtastung der Zeitachse an den Zeitpunkten t_n . Das nicht notwendigerweise über die gesamte Simulationsdauer $t_{\max} - t_{\min}$ in seiner Länge konstante Intervall $[t_n, t_{n+1}]$ wird mit Δt_n bezeichnet. Damit gilt

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n. \quad (3.155)$$

Im allgemeinen wird zwischen zwei Klassen sogenannter Zeitintegrationsverfahren unterschieden. Im Fall expliziter Verfahren geht die Lösung zu einem diskreten Zeitpunkt t_{n+1} ausschließlich aus den bereits berechneten Lösungsvektoren zu den Zeitpunkten $t < t_n$ hervor. Der Vorteil besteht dabei in der einfachen Implementierbarkeit sowie in der besonderen numerischen Effizienz, da die Lösung in einem neuen Zeitschritt auf der Basis von Matrix-Vektor-Produkten bestimmt werden kann. Allerdings existieren für derartige Verfahren Kriterien, welche die Wahl des Zeitschritts abhängig von der gewählten Gitterschrittweite beschränken. Im Fall quasistatischer Vorgänge führt dies zu extrem kleinen Zeitschritten im Vergleich zu den charakteristischen Zeitkonstanten des Systems. Daher sind sehr viele Zeitschritte zur Bestimmung der Lösung über die gewünschte Zeitspanne erforderlich und es erfolgt eine Überabtastung der ablaufenden Vorgänge. Demgegenüber sind implizite Verfahren weitgehend frei von Restriktionen bezüglich der Wahl der zeitlichen Diskretisierungsschrittweite. Allerdings ist in jedem Zeitschritt die Lösung mindestens eines linearen Gleichungssystems erforderlich, da der Wert der Zustandsgrößen nicht nur von den bereits berechneten Lösungsvektoren abhängig ist. Zwar besteht in diesem Fall keine Einschränkung in der Wahl der Größe der Zeitschritte, jedoch sinkt die erzielbare Ge-

naugigkeit mit wachsender Größe des verwendeten Zeitschritts. Implizite Zeitintegratoren stellen trotz des erhöhten Aufwands zur Berechnung der Zustandsgrößen für den neuen Zeitschritt die gängige Wahl bei der Simulation quasistatischer Vorgänge dar. Bei der Klassifizierung impliziter sowie expliziter Zeitintegratoren wird zwischen Ein- und Mehrschrittverfahren unterschieden. Im Fall von Mehrschrittverfahren erfolgt die Bestimmung der Lösung des neuen Zeitschritts unter der zusätzlichen Verwendung mehrerer bereits berechneter Lösungen zu vorangegangenen Zeitpunkten. Im Gegensatz dazu wird bei Einzschrittverfahren lediglich der Wert der Zustandsgrößen aus einem vergangenen Zeitschritt zur Bestimmung der Lösung im neuen Zeitschritt herangezogen. Die einfachste Form eines impliziten Einzschrittverfahrens ist durch die sogenannte Θ -Methode gegeben. Basierend auf der Approximation der Zustandsgröße u über eine gewichtete Summe aus dem Wert am zu berechnenden Zeitpunkt t_{n+1} und dem Wert zum Zeitpunkt t_n gemäß

$$u(t) \approx \Theta u(t_{n+1}) + (1 - \Theta) u(t_n) \quad (3.156)$$

werden entsprechende Einzschrittverfahren abhängig vom Wert des Gewichtungsfaktors Θ hergeleitet. Die Stabilität des Verfahrens ist für die Werte $1/2 \leq \Theta \leq 1$ sichergestellt [97]. Die erste zeitliche Ableitung wird durch einen Rückwärtsdifferenzenquotienten

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \quad (3.157)$$

mit der zeitlichen Schrittweite Δt angenähert. Für bestimmte Werte des Gewichtungsparmeters Θ sind feststehende Bezeichnungen gebräuchlich. Diese lauten:

$$\begin{array}{ll} \text{„Rückwärts-Euler“-Verfahren} & \text{für } \Theta = 1, \\ \text{Galerkin-Verfahren} & \text{für } \Theta = \frac{2}{3}, \\ \text{Crank-Nicholson-Verfahren} & \text{für } \Theta = \frac{1}{2}. \end{array} \quad (3.158)$$

Die beiden erstgenannten Verfahren weisen eine Konvergenzordnung von 1 auf, während beim Crank-Nicholson-Verfahren durch die zentrale Approximation eine höhere Fehlerordnung von zwei erreicht wird, wie beispielsweise in [98] angegeben. Mit sinkendem Wert von Θ verringert sich jedoch auch das Dämpfungsverhalten der Integratoren [9]. Dies ist insbesondere von Bedeutung, falls der zeitliche Verlauf der anregenden Größe Unstetigkeitsstellen aufweist, die zu Oszillationen im simulierten Zeitverhalten führen. Im Fall des „Rückwärts-Euler“-Verfahrens (engl. „*Backward Differentiation Formulas*“, BDF(1)), werden derartige Schwingungen innerhalb eines Zeitschrittes vollständig gedämpft. Von $\Theta = 1$ abweichende Werte führen jedoch mitunter zu starken Oszillationen, die im Fall des Crank-Nicholson-Verfahrens in der Praxis bis hin zu einer Destabilisierung des zeitlichen Integrationsprozesses führen können [99].

Bereits räumlich diskretisierte Diffusionsprobleme sind im magnetoquasistatischen Fall durch semidiskrete Matrixgleichungen, wie beispielsweise in Gleichung (3.117) bei Verwendung der Methode der Finiten Elemente, gegeben. Die zeitlich veränderliche Zustandsgröße wird in diesem Fall durch den Vektor \mathbf{a} der Freiheitsgrade zur Approximation des magnetischen Vektorpotentials repräsentiert. Dabei wird von einer Diskretisierung mit Ansatzfunktionen aus dem Raum der tangential stetigen Vektorfunktionen ausgegangen, so dass auf die entsprechende Kennzeichnung der Matrizen und Vektoren verzichtet werden kann. Durch Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke in Gleichung (3.156) und Gleichung (3.157) entsteht, unter der Annahme eines feldunabhängigen Materialverhaltens das System

$$\left(\mathbf{K}_\nu + \frac{1}{\Theta \Delta t} \mathbf{M}_\sigma \right) \mathbf{a}^{(n+1)} = \mathbf{j}_e^{(n+1)} + \frac{1 - \Theta}{\Theta} \mathbf{j}_e^{(n)} - \frac{1 - \Theta}{\Theta} \mathbf{K}_\nu \mathbf{a}^{(n)} + \frac{1}{\Theta \Delta t} \mathbf{M}_\sigma \mathbf{a}^{(n)} \quad (3.159)$$

mit $\mathbf{a}^{(n+1)} = \mathbf{a}(t_{n+1})$, $\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{a}(t_n)$, $\mathbf{j}_e^{(n+1)} = \mathbf{j}_e(t_{n+1})$ und $\mathbf{j}_e^{(n)} = \mathbf{j}_e(t_n)$. Dieselbe Vorschrift zur Zeitintegration gilt bei einer räumlichen Diskretisierung unter Verwendung der Methode der Finiten Integration³. Nach Ersetzen von \mathbf{a} durch den Vektor $\tilde{\mathbf{a}}$ des kantenintegrierten magnetischen Vektorpotentials sowie der Matrizen \mathbf{K}_ν und \mathbf{M}_σ durch $\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_\nu^{\text{FIT}} \mathbf{C}$ beziehungsweise $\mathbf{M}_\sigma^{\text{FIT}}$ entsteht die zugehörige Verfahrensvorschrift. Weiterhin lautet der Vektor des Anregungsstroms in diesem Fall $\hat{\mathbf{j}}_e$ anstelle von \mathbf{j}_e .

Im an dieser Stelle angenommenen Fall eines feldunabhängigen Verhaltens der Reluktivität ν und der elektrischen Leitfähigkeit σ kann die resultierende Matrixgleichung mit geeigneten numerischen Verfahren zur Lösung dünnbesetzter Gleichungssysteme in jedem Zeitschritt iterativ gelöst werden [100, 101]. Insbesondere bei der Verwendung konstanter Zeitschritte Δt in Verbindung mit feldunabhängigem Materialverhalten bleibt die Systemmatrix auf der linken Seite von Gleichung (3.159) über das Simulationsintervall unverändert und lediglich die Terme auf der rechten Seite müssen aktualisiert werden. Zur Berücksichtigung nichtlinearer Materialien erfolgt eine Linearisierung innerhalb jedes Zeitschritts. Die entsprechende Vorgehensweise wird in Abschnitt 4.2.1 in Verbindung mit einem Anwendungsbeispiel erläutert. Durch die Bereitstellung geeigneter Startlösungen bei der sukzessiven iterativen Lösung der Gleichungssysteme kann eine deutliche Verkürzung der Simulationsdauer erreicht werden [102, 103]. Dazu wird aus der Lösung für die Zustandsgrößen im aktuellen Zeitschritt durch Extrapolation eine Startlösung für den Lösungsprozess im neuen Zeitschritt generiert. Ähnliche Ansätze können ebenfalls bei nichtlinearen Problemen angewandt werden [104].

³Zur deutlichen Unterscheidung zwischen der Methode der Finiten Integration sowie der Methode der Finiten Elemente erfolgt die Kennzeichnung der zur ersteren gehörigen Matrizen unter Einführung der zusätzlichen Hochstellung "FIT", die in Abschnitt 3.1.2 nicht eingesetzt wurde.

Die beschriebene Θ -Methode gehört zu der Familie der impliziten Runge-Kutta-Verfahren [8, 97]. Für diese Klasse von Einschrittverfahren existieren auch Integrationsvorschriften, die eine Fehlerordnung größer als 1 erreichen. Dabei kommen mehrstufige Ansätze zum Einsatz, welche auch eine Fehlerschätzung in Form eingebetteter Verfahren und in Verbindung damit eine adaptive Zeitschrittweitensteuerung ermöglichen [9]. Die höhere Ordnung in der zeitlichen Approximation wird dabei durch die Bestimmung von Zwischenlösungen innerhalb des Zeitschritts Δt_n erreicht, wobei es sich unverändert um ein Einschrittverfahren handelt, da weiterhin nur die Lösung eines vergangenen Zeitschritts zur Bestimmung des Vektors der Zustandsgrößen im neuen Zeitschritt verwendet wird. Innerhalb der im folgenden Kapitel beschriebenen Anwendung ist die Modellierung nichtlinearer Materialien erforderlich. Der Vorteil durch die bei einer Zeitintegration höherer Ordnung mögliche Wahl größerer Zeitschritte wird jedoch in diesem Fall durch den größeren Aufwand bei der Linearisierung teilweise kompensiert. Bei der Verwendung einer kleinen Zeitschrittweite stellt die Lösung des vergangenen Zeitschritts einen guten Startwert für die erforderliche nichtlineare Iteration dar, die somit schneller eine vorgegebene Genauigkeitsschranke erreicht als im Fall größerer Zeitschritte. Daher kommt im weiteren dennoch ein einfaches Verfahren erster Ordnung bezüglich des zeitlichen Diskretisierungsfehlers in Form der Θ -Methode zum Einsatz.

4 Numerische Simulationen am Beispiel supraleitender Dipolmagnete

Im Rahmen des Projektes FAIR (engl. „*Facility for Antiproton and Ion Research*“) am GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung hat der Bau zweier Schwerionen-Synchrotrons SIS-100 und SIS-300 bereits begonnen [105, 106]. Zur Führung des Teilchenstrahls auf einer annähernd kreisförmigen Bahn wird eine große Zahl an Dipolmagneten benötigt, deren Spulen aus supraleitendem Material gefertigt werden. Dies stellt in diesem Fall die kostengünstigere Alternative im Hinblick auf die laufenden Kosten während der geplanten Betriebsdauer dar. Die Designphase sowie die mechanische Konstruktion sind zwar aufgrund der benötigten Tieftemperaturtechnologie aufwendiger, jedoch wird durch Verwendung supraleitender Technologie weniger Material für die stromführenden Leiter als auch für das Eisenjoch der Magnete benötigt. Die erforderliche maximale magnetische Flussdichte innerhalb des Öffnungsbereiches der Magnete für das Synchrotron SIS-100 liegt bei 2.1 T bei gegebenem Ringdurchmesser und geplanter Energie der zu beschleunigenden Teilchen. Der vorgesehene Betriebszyklus erfordert ein, im Vergleich zu anderen, bereits bestehenden Anlagen, schnelles Erhöhen und anschließendes Absenken der magnetischen Flussdichte innerhalb des Magneten, um der synchron erfolgenden Beschleunigung innerhalb des Rings Rechnung zu tragen. Die maximale Feldänderungsrate liegt in diesem Fall bei 4 T/s im schnellsten vorgesehenen Zyklus. Diese Rahmenbedingungen stellen eine besondere Herausforderung an die Konstruktion der Magnete wie auch an die während der Entwicklungsphase eingesetzten numerischen Simulationswerkzeuge zur Berechnung der elektromagnetischen Felder dar. Verfügbare kommerzielle Simulationsprogramme bieten im allgemeinen nicht alle erforderlichen Modellierungs- und Simulationsfähigkeiten. Weiterhin stellt auch die Kapazität einzelner Rechner eine Barriere bei der elektromagnetischen Feldsimulation von Magneten dieser Größe und Bauart dar. In diesem Kapitel werden entsprechende, speziell an die Simulation der SIS-100-Dipolmagnete angepasste Simulationsverfahren sowie die bei deren Anwendung erzielten Ergebnisse vorgestellt.

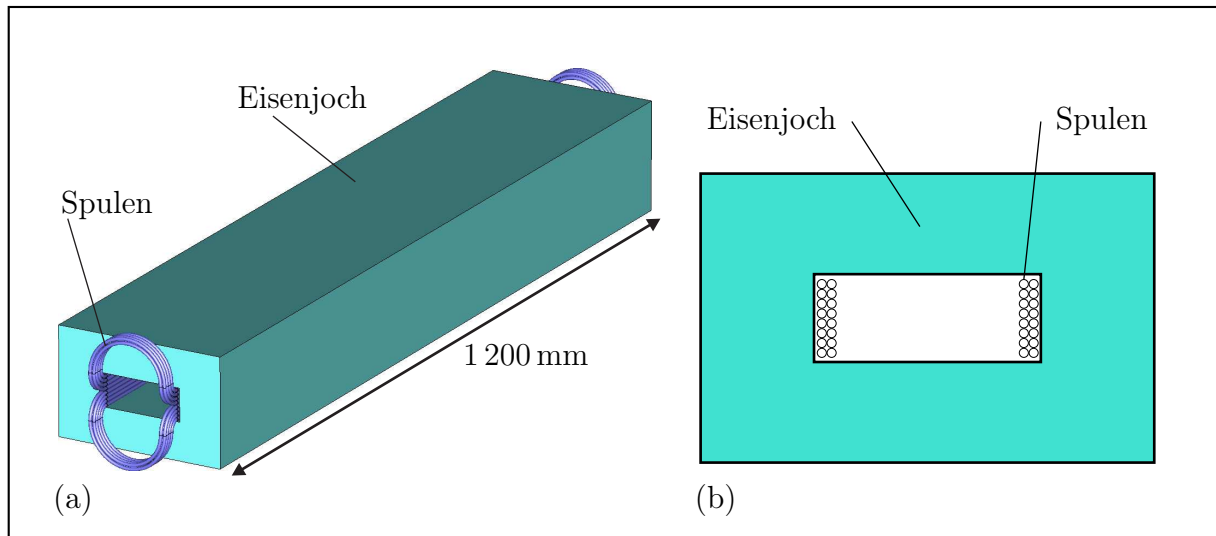


Abbildung 4.1: (a) Schematische Darstellung eines Magneten vom „window-frame“-Typ zusammen mit den im Endbereich abgewinkelten Spulen; (b) Querschnitt des Eisenjochs mit den doppelagigen Spulenwindungen.

4.1 Der SIS-100-Magnet

Als Ausgangspunkt zur Konstruktion der Dipolmagneten zum Einsatz im Schwerionen-Synchrotron SIS-100 wurde der Nuclotron-Magnet gewählt. Dieser supraleitende Magnet wurde für den gleichnamigen Beschleunigerring am Joint Institute for Nuclear Research (JINR) in Dubna, Russland, konstruiert und ist dort bereits seit 1993 in Gebrauch [107]. Es handelt sich um einen Dipolmagneten vom „window-frame“-Typ, der mit Spulen aus supraleitfähigem Material ausgestattet ist. Abbildung 4.1(a) zeigt den vereinfachten Aufbau der Magnetgeometrie. Die Spulenkel bestehen aus NbTi-Filamenten, die in einer Kupfermatrix angeordnet sind. Zur Kühlung auf die zum Erreichen des supraleitfähigen Zustands erforderliche Temperatur sind die einzelnen Kabel von Aluminium-Kühlkanälen durchzogen, durch welche flüssiges Helium strömt. Eine schematische Darstellung der doppelagigen Spulenanordnung ist in Abbildung 4.1(b) gegeben. Die vorhandene Magnetanordnung erfüllte die gestellten Anforderungen jedoch nur teilweise [108]. Aufgrund der von der vorgesehenen Anwendung vorgegebenen hohen Änderungsrate der magnetischen Flussdichte während des Beschleunigungszyklus sind hohe Verluste durch im Eisenjoch induzierte Wirbelströme, insbesondere im Endbereich des Magneten, zu erwarten. Weiterhin bestehen hohe Anforderungen an die Homogenität der magnetischen Flussdichte im Öffnungsbereich, die während des gesamten Zyklus eine vorgegebene Schranke von $6 \cdot 10^{-4}$ relativ zur Stärke des Dipolfeldes nicht überschreiten darf. Ausgehend von dem ursprünglichen Design wurden daher zwei Hauptziele zur Optimierung und Anpassung des Magneten

zum Einsatz im SIS-100 formuliert:

- Reduktion der Jouleschen Verluste unter den vorgesehenen, mit einer schnellen Änderung der magnetischen Flussdichte einhergehenden Betriebsbedingungen;
- Weitere Verbesserung der Homogenität der magnetischen Flussdichte im gesamten Öffnungsbereich des Magneten.

An der Erfüllung dieser Ziele arbeiten verschiedene Gruppen im Rahmen von Forschungs- und Entwicklungskooperationen. Im Zuge entsprechender Untersuchungen wurden unterschiedliche Modifikationen des ursprünglichen Designs unter Einsatz von Messungen an entsprechend konstruierten Prototypen wie auch auf der Basis numerischer Feldsimulationen vorgeschlagen.

Joulesche Verluste im transienten Betriebsmodus

Die unter einer zeitlich variierenden magnetischen Flussdichte entstehenden induzierten Felder führen über verschiedene Mechanismen zu unerwünschten Verlusten innerhalb der Magnetanordnung. Diese können unterschieden werden in Effekte, die mit den supraleitenden Kabeln in Verbindung stehen und jene, die im ferromagnetischen Eisenjoch und in den zur mechanischen Stabilisierung eingesetzten Anbauteilen auftreten. Zur ersten Kategorie zählen Wirbelströme, die innerhalb der Kupfermatrix des supraleitfähigen Kabels induziert werden. Die Strompfade verlaufen teilweise innerhalb des supraleitenden Filamentes und schließen sich in normal leitenden Kontaktbereichen, welche durch das Verdrillen der einzelnen Drähte entstehen [109, 110]. Sie werden auch als Kopplungsströme (engl. „*coupling currents*“) bezeichnet und beschreiben somit einen Effekt, der zwischen den einzelnen Filamenten auftritt [111]. Insbesondere innerhalb von Rutherford-Kabeln treten zusätzlich sogenannte Kabelwirbelströme (engl. „*cable eddy-currents*“) auf, die durch ein Magnetisierungsmodell beschrieben werden können und ebenfalls zu den Gesamtverlusten beitragen [112, 113]. Den größten Beitrag liefern in dem hier vorliegenden Fall jedoch die zur zweiten genannten Kategorie zählenden Wirbelstrom- und Hysterese-Effekte im Eisenjoch sowie in den Anbauteilen.

Durch den Aufbau des Eisenjochs aus lamellierten, gewalzten Stahlblechen, die gegeneinander durch eine dünne Schicht elektrisch isoliert sind, wird der Induktion von Wirbelströmen im transienten Betrieb wirkungsvoll entgegengetreten. Allerdings reduziert sich die magnetische Länge entsprechend des Anteils an nicht permeablem Isolationsmaterial. Durch die gebogene Geometrie der Spulen im Endbereich treten jedoch an dieser Stelle, wie in Abbildung 4.2 dargestellt, Komponenten der magnetischen Flussdichte auf, die senkrecht auf der Ebene der Lamellierung stehen. Dies führt zu dem unerwünschten Effekt der Induktion von Wirbelströmen, die durch die hohe Leitfähigkeit des Stahlblechs in Wärme umgesetzt

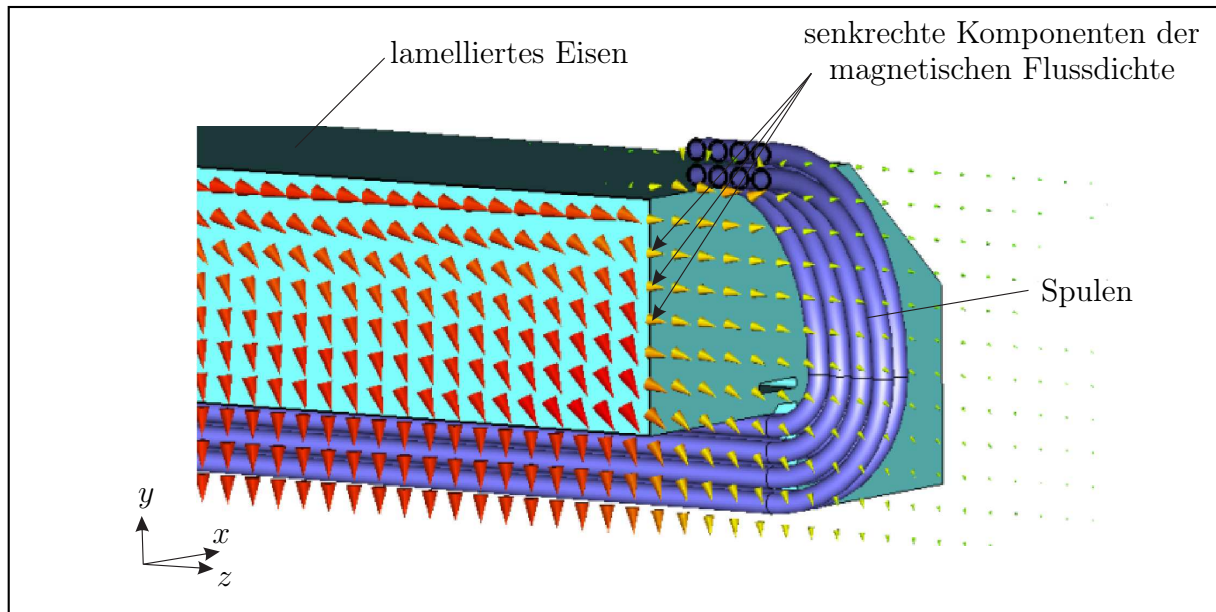


Abbildung 4.2: Verlauf der magnetischen Flussdichte im Endbereich eines aus lamellierten Stahlblechen aufgebauten Magnetjochs.

werden. Um den supraleitfähigen Zustand der Leitungsfilamente aufrecht zu erhalten, muss der resultierende Wärmeeintrag über die Tieftemperatur-Kühlsysteme abgeführt werden. Anderenfalls führen die Wirbelstromverluste zunächst zu einer sukzessiven Erwärmung des Eisenjochs, die nach endlicher Zeit auch die Spulen erfasst und zu einem Zusammenbruch der Supraleitung führen kann. Aus diesem Grund ist eine ausreichende Kühlung essentiell, wobei die Wirbelstromverluste so gering wie möglich sein sollten, um die Kosten für die Kühlleistung auf Tieftemperaturniveau zu begrenzen. Eine Möglichkeit, den Einfluss des genannten Effekts zu verringern besteht in der Abkehr von dem ursprünglichen Design, bei dem der gesamte Magnet einschließlich des Eisenjochs auf die für die Supraleitfähigkeit der Spulen erforderliche Temperatur gekühlt wird. Entsprechende Messungen ergaben eine Verringerung der Wärmeverluste auf etwa die Hälfte des ursprünglichen Wertes [114]. Weitere Vorschläge zur Reduzierung der Wirbelstromverluste durch Modifikationen der Eisengeometrie basieren auf der Einführung dünner Schnitte beziehungsweise der Verwendung spezieller Materialien im Endbereich des Magneten mit dem Ziel der Unterbrechung der Wirbelstrompfade [115, 116]. Zusätzlich kann durch den Einsatz flacherer Endwindungen eine Reduzierung der unerwünschten Komponente der magnetischen Flussdichte senkrecht zur Lamellierungsebene erzielt werden [117]. Aufgrund der Komplexität der vollständigen Modelle wurden nichtlineare numerische Simulationen zunächst anhand vereinfachter Geometrien durchgeführt. So kann ein qualitativer Vergleich mit den konstruierten Prototypen sowie zwischen den von den verschiedenen Simulationswerkzeugen errechneten

Voraussagen über die Höhe der im transienten Betrieb zu erwartenden Jouleschen Verluste durchgeführt werden. Entsprechende Ergebnisse, die unter Verwendung der im vorangehenden Kapitel beschriebenen numerischen Lösungsansätze entstanden sind, werden im Rahmen dieser Arbeit in Abschnitt 4.3 vorgestellt.

Untersuchung der Homogenität der magnetischen Flussdichte

Das zur Anwendung als Strahlführungsmagnet gewünschte reine Dipolfeld wird durch unterschiedliche statische sowie dynamische Mechanismen beeinträchtigt. Auch in diesem Fall unterscheidet man zwischen Effekten, die innerhalb der supraleitenden Kabel zu Tage treten, sowie solchen, die dem Magnetjoch einschließlich der Anbauteile zuzuordnen sind. In die erste Kategorie fallen sogenannte persistente Ströme, die über das Ampèresche Gesetz durch die zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte innerhalb der supraleitenden Filamente induziert werden [118]. Aufgrund des nahezu verschwindenden elektrischen Widerstands zirkulieren sie mit einer sehr langen Zeitkonstante in den Spulen und erzeugen dabei ein sekundäres Magnetfeld, welches sich störend auf das gewünschte Dipolfeld auswirkt [119]. Ebenso führen die bereits erwähnten Kabelwirbelströme zu einem ähnlichen Effekt, wenngleich mit einer kürzeren Abklingdauer. Zur zweiten Kategorie zählen Effekte, die durch das nichtlineare Materialverhalten des ferromagnetischen Eisenjochs entstehen. Diese fallen besonders in Betriebszuständen ins Gewicht, in denen noch nicht die maximale magnetische Flussdichte aufgebaut ist, da in diesem Fall lokale Sättigungseffekte auftreten, welche die Feldqualität im Öffnungsbereich negativ beeinflussen können. Desweiteren können Feldverzerrungen durch das innerhalb des Magnetjochs verlaufende metallische Strahlrohr entstehen. Dies ist zwar aus nicht permeablem Edelstahl gefertigt, jedoch führen darin induzierte Wirbelströme ebenfalls zu einer Beeinträchtigung des Dipolfeldes. Mit dem Ziel eines möglichst homogenen Verlaufs der magnetischen Flussdichte im Öffnungsbereich des Magneten wurden im Sinne der Designanforderungen bereits einige Veränderungen an der Ausführung des Eisenjochs vorgeschlagen. Diese erfolgten meist auf der Basis einer zweidimensionalen Approximation des Jochvolumens sowie der Spulen unter Verwendung kommerzieller Simulationswerkzeuge [120, 121]. Bei dieser Art der Simulation können die insbesondere in den Endbereichen des Magneten auftretenden Wirbelstromeffekte nicht unmittelbar berücksichtigt werden. Entsprechende dreidimensionale Simulationen zu dieser Thematik, teilweise konzentriert auf die Untersuchung dieser Randeffekte, werden in Abschnitt 4.4 dieser Arbeit behandelt.

4.2 Simulationsverfahren

Auch bei der numerischen Simulation vereinfachter Magnetaufbauten besteht ein hoher Modellierungsaufwand. Zum einen müssen ferromagnetische Sättigungseffekte aufgrund des hohen Maximalwertes der magnetischen Flussdichte von bis zu 2.1 T bei der Simulation berücksichtigt werden. Zum anderen muss der herstellungsbedingten und erwünschten Anisotropie des Jochmaterials Rechnung getragen werden. Desweiteren handelt es sich bei den Anregungsprofilen um unstetige Funktionen. Dies macht, zusammen mit der bereits erwähnten Notwendigkeit der Modellierung der ferromagnetischen Sättigung, transiente Simulationen erforderlich. Da die vorkommenden zeitlichen Änderungen die Anwendung der magnetoquasistatischen Approximation gemäß Abschnitt 2.2 zulassen, kommen entsprechende implizite Zeitintegrationsverfahren aus Abschnitt 3.4 zum Einsatz, welche die Lösung mehrerer großer, wenngleich dünnbesetzter, Gleichungssysteme in jedem Zeitschritt erfordern. Trotz der uneingeschränkten Wählbarkeit der Größe des verwendeten Zeitschritts bei Verfahren dieser Klasse darf dieser zur Erfüllung der aus der Anwendung resultierenden strengen Genauigkeitsanforderungen nicht zu groß gewählt werden. Die einzelnen, zur numerischen Simulation der elektromagnetischen Felder innerhalb des vorgesehenen SIS-100-Magneten erforderlichen Modellierungsschritte werden im folgenden beschrieben.

4.2.1 Modellierung der ferromagnetischen Sättigung

Ausgehend von der räumlich und zeitlich diskretisierten Formulierung unter Verwendung des modifizierten magnetischen Vektorpotentials können entsprechende Linearisierungen angewandt werden, die in Form einer zusätzlichen Iteration innerhalb der einzelnen Zeitschritte angewandt werden. Dieser Linearisierungsschritt wird separat für eine Diskretisierung unter Verwendung der Methode der Finiten Integration auf einem struktuierten, hexagonalen Gitter sowie für die Methode der Finite Elemente auf einem Tetraedergitter beschrieben.

Methode der Finiten Integration

In diesem Fall ist die nichtlineare magnetoquasistatische Formulierung unter Verwendung des modifizierten magnetischen Vektorpotentials $\hat{\mathbf{a}}$, das auf dem primären Gitter G über $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{a}}$ definiert ist, durch

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_\nu(\hat{\mathbf{b}}^{(n+1)})\mathbf{C}\hat{\mathbf{a}}^{(n+1)} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_\sigma\hat{\mathbf{a}}^{(n+1)} = \underbrace{\hat{\mathbf{j}}_e^{(n+1)} - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_\sigma\hat{\mathbf{a}}^{(n)}}_{\mathbf{r}^{(n)}} \quad (4.1)$$

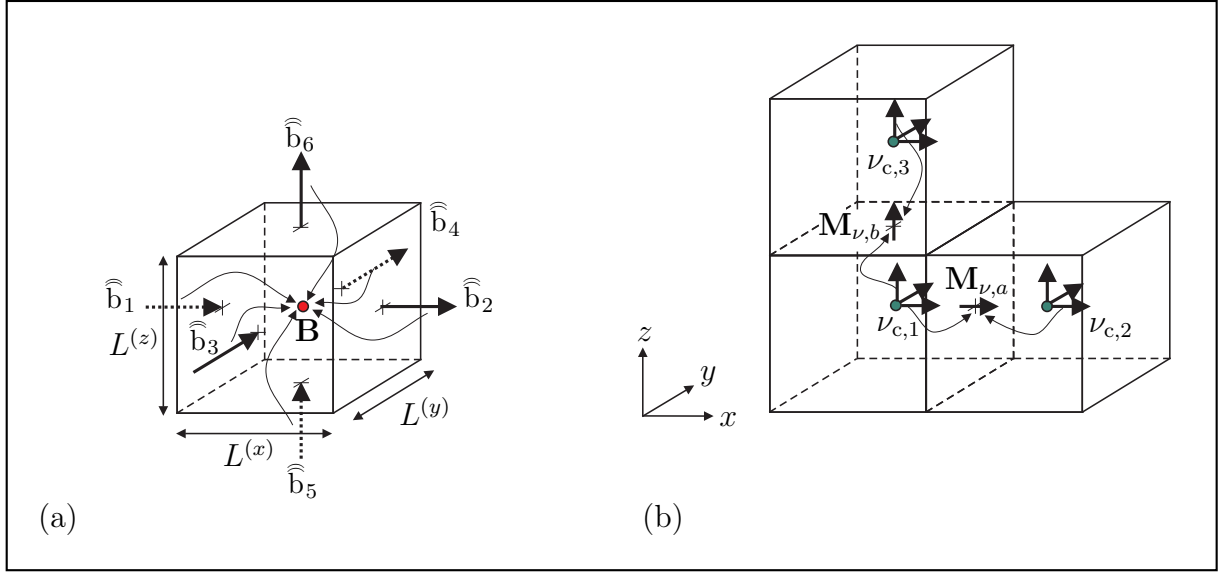


Abbildung 4.3: (a) Mittelung der magnetischen Gitterflüsse innerhalb einer primären Gitterzelle; (b) Mittelung der Reluktivitäten angrenzender Zellen zur Erstellung der linearisierten Materialmatrix.

mit einer zeitlichen Diskretisierung nach der Θ -Methode gemäß Gleichung (3.159) mit $\Theta = 1$ gegeben. Die Einträge der Materialmatrix \mathbf{M}_ν sind dabei von dem aktuellen Wert der magnetischen Flussdichte abhängig, wobei der Zusammenhang zwischen den Feld- und Flussgrößen \vec{H} und \vec{B} durch eine charakteristische Materialkurve für die Reluktivität ν gegeben ist. Eine iterative Linearisierung kann basierend auf der Formulierung von Gleichung (4.1) als Fixpunktproblem $\mathbf{F}^{(n+1)}(\hat{\mathbf{a}}^{(n+1)}) = 0$ mit

$$\mathbf{F}^{(n+1)}(\hat{\mathbf{a}}^{(n+1)}) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_\nu(\hat{\mathbf{b}}^{(n+1)})\mathbf{C}\hat{\mathbf{a}}^{(n+1)} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_\sigma\hat{\mathbf{a}}^{(n+1)} - \mathbf{r}^{(n)} = 0 \quad (4.2)$$

erfolgen. Im Rahmen einer Fixpunktiteration wird in jedem Schritt k aus dem aktuellen Vektor der Zustandsgrößen $\hat{\mathbf{a}}^{(n,k)}$ durch Anwendung der Rotationsmatrix \mathbf{C} der Vektor der magnetischen Gitterflüsse $\hat{\mathbf{b}}^{(n,k)}$ bestimmt. Da im hier betrachteten Fall eine homogene Materialfüllung der primären Gitterzellen vorliegt, wird zur Modellierung der nichtlinearen Feldabhängigkeit der Reluktivität ν ein einzelner Wert der magnetischen Flussdichte für jede Zelle benötigt. Dieser wird gemäß Abbildung 4.3(a) durch eine Mittelung der entsprechenden Gitterflüsse auf den einzelnen Zellen bestimmt. Mit den primären Kantenlängen $L^{(x)}$, $L^{(y)}$ und $L^{(z)}$ ergibt sich damit der betreffende Wert

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\hat{b}_1 + \hat{b}_2}{2L^{(y)}L^{(z)}}, \frac{\hat{b}_3 + \hat{b}_4}{2L^{(x)}L^{(z)}}, \frac{\hat{b}_5 + \hat{b}_6}{2L^{(x)}L^{(y)}} \right) \quad (4.3)$$

für die betrachtete Zelle [117]. Um eine skalare, aus Messungen an Materialproben erhaltene Sättigungscharakteristik, wie in Abbildung 4.4(a) dargestellt, einsetzen zu können, wird

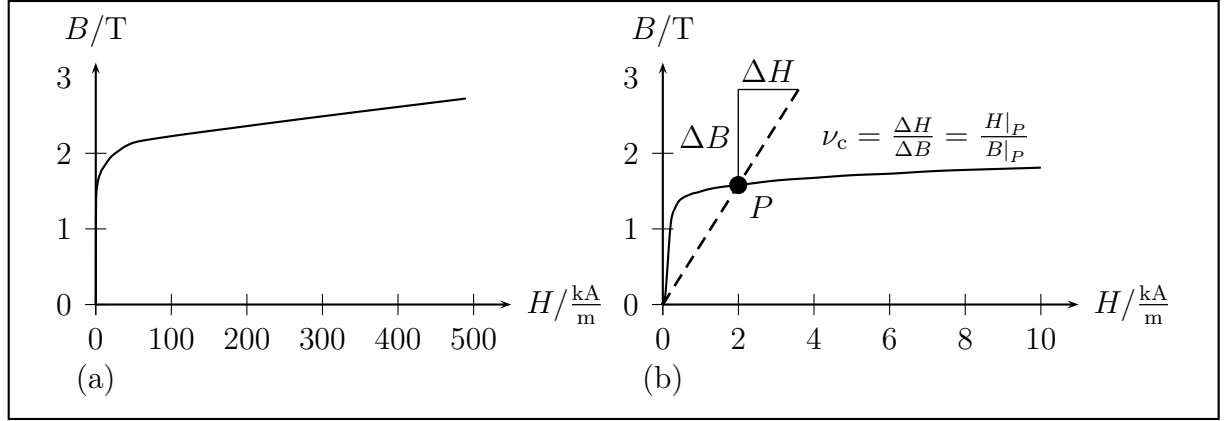


Abbildung 4.4: (a) Skalare Materialcharakteristik zum nichtlinearen Zusammenhang zwischen magnetischer Flussdichte B und magnetischer Feldstärke H ; (b) vergrößerte Darstellung unter Veranschaulichung der Sehnen-Reluktivität ν_c an einem Arbeitspunkt P .

der Betrag des lokalen Vektors der magnetischen Flussdichte gebildet. In der einfachsten Form einer Linearisierung ergibt sich daraus ein Arbeitspunkt P , der in Abbildung 4.4(b) in einer vergrößerten Ansicht der Materialcharakteristik eingezeichnet ist. Somit folgt aus der Kennlinie ein neuer Wert für die Reluktivität ν_c , der über die Sehne zwischen dem Koordinatenursprung und dem Arbeitspunkt P veranschaulicht werden kann. Um aus diesen, auf den primären Zellen gegebenen Werten der Reluktivität, eine aktualisierte Reluktivitätsmatrix $\mathbf{M}_\nu^{(n+1,k)}$ aufzubauen, erfolgt invers zur vorherigen Vorgehensweise eine Mittelung der Reluktivität zwischen den angrenzenden Zellen gemäß Abbildung 4.3(b). Diese wird über die in Gleichung (3.37) gegebene Vorschrift der Längenmittelung über die zugehörigen dualen Kanten zum Aufbau der aktualisierten Reluktivitätsmatrix gemäß Gleichung (3.39) genutzt. In x - und z -Richtung entstehen dabei aus den auf den primären Zellen gegebenen Werten $\nu_{c,1..3}$ die in Abbildung 4.3(b) dargestellten Einträge $\mathbf{M}_{\nu,a}$ und $\mathbf{M}_{\nu,b}$ für jede Zelle, die mit nichtlinearem Material gefüllt ist. Unter Verwendung dieser Reluktivitätsmatrix wird das aus Gleichung (4.2) hervorgehende Gleichungssystem

$$\left(\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{\nu,c}^{(n+1,k)} \mathbf{C} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_\sigma \right) \hat{\mathbf{a}}^{(n+1,*)} = \mathbf{r}^{(n)} \quad (4.4)$$

gelöst. Aus der erhaltenen Zwischenlösung $\hat{\mathbf{a}}^{(n+1,*)}$ kann über unterschiedliche Verfahren die Lösung für die Zustandgrößen im neuen Iterationsschritt $k + 1$ konstruiert werden. Die direkte Verwendung von der Lösung von Gleichung (4.4) gemäß $\hat{\mathbf{a}}^{(n+1,k+1)} = \hat{\mathbf{a}}^{(n+1,*)}$ resultiert in der Praxis häufig in einem sehr langsamen Konvergenzverhalten und in der Folge in einer sehr hohen Anzahl an Iterationsschritten k . Zu einer Verbesserung kann bei

bestimmten Anwendungen eine Relaxation der Form

$$\hat{\mathbf{a}}^{(n+1,k+1)} = \omega \hat{\mathbf{a}}^{(n+1,*)} + (1 - \omega) \hat{\mathbf{a}}^{(n+1,k)} \quad (4.5)$$

unter Verwendung eines Relaxationsparameters $0 \leq \omega \leq 1$ führen. Dieser Parameter kann zum einen fest gewählt werden oder zum anderen durch eine Liniensuche unter Minimierung des nichtlinearen Residuums

$$\epsilon_{\text{nl}} = \left\| \mathbf{F}^{(n+1)}(\hat{\mathbf{a}}^{(n+1,k+1)}) \right\|_2 \quad (4.6)$$

bestimmt werden. Dabei muss die Minimierung nicht zwangsweise exakt durchgeführt werden, sondern es wird durch einfache Auswertung von Gleichung (4.6) derjenige Lösungskandidat, welcher zu dem kleinsten Wert des nichtlinearen Residuums ϵ_{nl} führt, ausgewählt. Dabei wird der Relaxationsparameter ω von dem Wert 1 ausgehend durch sukzessive Halbierung bis hin zu einem vorgeschriebenen Minimalwert $\omega > 0$ bestimmt [122]. Mit der auf eine der beschriebenen Arten gefundenen Lösung $\hat{\mathbf{a}}^{(n+1,k+1)}$ wird erneut eine aktualisierte Reluktivitätsmatrix aufgebaut. Somit erfolgt eine sukzessive Substitution der Lösungen von Gleichung (4.4) in die zugehörige Materialcharakteristik, bis die vorgegebene Genauigkeitsschranke $\epsilon > \epsilon_{\text{nl}}^{(k)}$ im Schritt k unterschritten wird. Dieses Verfahren weist typischerweise eine Konvergenzordnung von 1 auf. Durch den Einsatz eines Newton-Verfahrens unter Verwendung der Jacobi-Matrix des Funktional $\mathbf{F}^{(n+1)}$ gemäß Gleichung (4.2) in jedem Iterationsschritt kann ein verbessertes Konvergenzverhalten erzielt werden. Die Reluktivitätsmatrix verliert jedoch in diesem Fall ihre Diagonalgestalt [123, 124]. Da jedoch ohnehin ein implizites Verfahren zur Zeitintegration eingesetzt wird, macht sich lediglich der erhöhte Speicherbedarf sowie der größere Aufwand beim Aufbau der Matrix negativ bemerkbar. Weiterhin geht auch die Symmetrie der resultierenden Gleichungssysteme verloren, so dass geeignete iterative Lösungsverfahren eingesetzt werden müssen [100]. Ein entsprechendes Newton-Verfahren wird im folgenden in Verbindung mit der Methode der Finiten Elemente vorgestellt.

Methoden der Finiten Elemente

Unter Verwendung derselben transienten magnetoquasistatischen Formulierung wie im obigen Fall ist die aus der zeitlichen Diskretisierung von Gleichung (3.117) mit $\Theta = 1$ hervorgehende Matrixgleichung bei einer Approximation des modifizierten magnetischen Vektorpotentials mit tangential stetigen Vektorfunktionen durch

$$\mathbf{K}_\nu(\mathbf{b}^{(n+1)})\mathbf{a}^{(n+1)} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_\sigma\mathbf{a}^{(n+1)} = \underbrace{\mathbf{j}_e^{(n+1)} - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_\sigma\mathbf{a}^{(n)}}_{\mathbf{r}^{(n)}} \quad (4.7)$$

gegeben. Dabei beschreibt $\mathbf{b}^{(n+1)}$ den Vektor der Freiheitsgrade für die magnetische Flussdichte. Analog zu Gleichung (4.2) kann eine Notation in Fixpunktform $\mathbf{F}^{(n+1)}(\mathbf{a}^{(n+1)}) = 0$

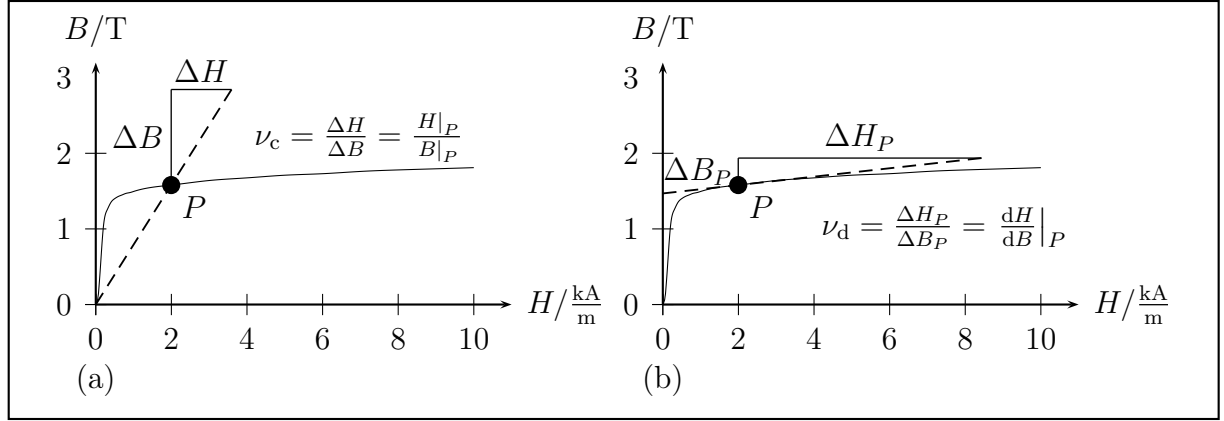


Abbildung 4.5: Veranschaulichung der (a) Sehnen-Reluktivität ν_c und (b) der differentiellen Reluktivität ν_d anhand einer vergrößerten Darstellung der skalaren Materialcharakteristik an einem Arbeitspunkt P .

gemäß

$$\mathbf{F}^{(n+1)} = \mathbf{K}_\nu(\mathbf{b}^{(n+1)})\mathbf{a}^{(n+1)} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_\sigma\mathbf{a}^{(n+1)} - \mathbf{r}^{(n)} = 0 \quad (4.8)$$

erfolgen. Das Newton-Verfahren ist unter Verwendung der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_F = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{a}$ des Funktionals $\mathbf{F}^{(n+1)}$ in jedem nichtlinearen Iterationsschritt k über

$$\mathbf{J}_F^{(n+1,k)}\mathbf{a}^{(n+1,k+1)} = \mathbf{J}_F^{(n+1,k)}\mathbf{a}^{(n+1,k)} - \mathbf{F}^{(n+1)}(\mathbf{a}^{(n,k)}) \quad (4.9)$$

definiert. Die globale Matrix ergibt sich durch Differentiation des Funktionals \mathbf{F} nach den Zustandsgrößen zu

$$\mathbf{J}_F^{(n+1,k)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{a}^{(n+1,k)}} (\mathbf{K}_\nu(\mathbf{b}^{(n+1,k)})\mathbf{a}^{(n+1,k)})}_{\mathbf{K}_{\nu,d}} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_\sigma. \quad (4.10)$$

Dabei wird die **differentielle Steifigkeitsmatrix** $\mathbf{K}_{\nu,d}$ für den Zeitschritt $n+1$ sowie den nichtlinearen Iterationsschritt k eingeführt. Unter Anwendung der Produktregel folgt

$$\mathbf{K}_{\nu,d} = \mathbf{K}_{\nu,c}(\mathbf{b}^{(k)}) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{a}^{(k)}} (\mathbf{K}_\nu(\mathbf{b}^{(k)})) \mathbf{a}^{(k)}}_{\mathbf{K}_{\nu,inc}}, \quad (4.11)$$

wobei $\mathbf{K}_{\nu,c}$ die **Sehnen-Steifigkeitsmatrix** sowie $\mathbf{K}_{\nu,inc}$ die **inkrementelle Steifigkeitsmatrix** im nichtlinearen Iterationsschritt k bezeichnet. Zur Bestimmung der Einträge dieser beiden Matrizen wird zunächst das zugrundeliegende skalare Sättigungsmodell in Abbildung 4.5 betrachtet. Benötigt wird die differentielle Reluktivität, welche durch

$$\nu_d = \left. \frac{dH}{dB} \right|_P = \left. \frac{d(\nu(B)B)}{dB} \right|_P = \underbrace{\nu(B_P)}_{\nu_c} + B_P \left. \frac{d\nu(B)}{dB} \right|_P \quad (4.12)$$

für den aktuellen Arbeitspunkt P gegeben ist. In Abbildung 4.5(a) ist, analog zu Abbildung 4.4(a), die Sehnen-Reluktivität ν_c am Arbeitspunkt der skalaren Materialcharakteristik dargestellt. Demgegenüber zeigt Abbildung 4.5(b) die differentielle Reluktivität ν_d in Form der Steigung der Tangenten im Arbeitspunkt P . Nach Substitution und Anwendung der Kettenregel hat die inkrementelle Reluktivität die Darstellung

$$\nu_{\text{inc}} = 2B_P^2 \left. \frac{d\nu(B)}{dB^2} \right|_P. \quad (4.13)$$

In dem hier betrachteten skalaren Sättigungsmodell bezeichnet B stets die euklidische Länge des Vektors der magnetischen Flussdichte. Es wird im folgenden zum Aufbau der lokalen Steifigkeitsmatrizen eingesetzt. Die Einträge der Sehnen-Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\nu,c}(\mathbf{b}^{(k)})$ gehen, in Anlehnung an Gleichung (3.112), elementweise aus

$$(\mathbf{K}_{\nu}^e(\mathbf{b}^{(k)}))_{i,i'} = \int_{V_e^e} \left(\nabla \times \vec{w}_i \cdot \left(\bar{\bar{1}} \nu_c(\mathbf{B}_P^e) \right) \nabla \times \vec{w}_{i'} \right) dV \quad (4.14)$$

hervor, wobei $\bar{\bar{1}}$ einen (3×3) Einheitstensor bezeichnet. Zur Bestimmung des Vektors der magnetischen Flussdichte $\mathbf{B}_P^e \in \mathbb{R}^3$ am Arbeitspunkt P werden die Freiheitsgrade der Finite-Elemente-Approximation $\mathbf{b}^{(k)}$ gemäß der Definition des magnetischen Vektorpotentials $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ über die Koeffizienten a_i der entsprechenden Ansatzfunktionen durch

$$\mathbf{B}_P^e = \nabla \times \vec{A}^e = \sum_i a_i (\nabla \times \vec{w}_i) \quad (4.15)$$

ausgedrückt. Die Auswertung erfolgt im Mittelpunkt $M(x_M, y_M, z_M)$ des Tetraeders. Unter Betragsbildung $B = |\mathbf{B}_P^e|$ kann der Wert der lokalen Sehnen-Reluktivität ν_c auf der Basis der skalaren Materialcharakteristik in Abbildung 4.5(a) bestimmt werden. Im hier zunächst betrachteten Fall einer isotropen Charakteristik ergibt sich die vektorielle Reluktivität durch Multiplikation mit dem Einheitstensor.

Eine elementweise Betrachtung der in Gleichung (4.11) eingeführten, inkrementellen Steifigkeitsmatrix führt zu der lokalen Matrix

$$\mathbf{K}_{\nu,\text{inc}}^e = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}^e} (\mathbf{K}_{\nu}^e(\mathbf{b}^e)) \mathbf{a}^e \quad (4.16)$$

für den nichtlinearen Iterationsschritt k , auf dessen Kennzeichnung aus Gründen der Übersichtlichkeit in der Notation an dieser Stelle verzichtet wird. Dabei bezeichnet \mathbf{a}^e die entsprechende Untermenge der mit dem betrachteten Element e assoziierten Freiheitsgrade. Für die Zeile i der lokalen Matrix sind die Einträge unter Verwendung von Gleichung (3.109) durch

$$(\mathbf{K}_{\nu,\text{inc}}^e(\mathbf{b}^{(k)}))_{i,\alpha} = \int_{V_e^e} \sum_i \left(\nabla \times \vec{w}_i \cdot \left(a_i \frac{d}{da_\alpha} \nu(\mathbf{b}^e) \right) \cdot \nabla \times \vec{w}_{i'} \right) dV \quad (4.17)$$

gegeben. Die Ausführung der Differentiation nach a_α liefert unter der Anwendung der Kettenregel in Verbindung mit Gleichung (4.15) den Ausdruck

$$\frac{d\nu(\mathbf{B}^e)}{da_\alpha} = \frac{d\nu(\mathbf{B}^e)}{d\mathbf{B}^e} \frac{d\mathbf{B}^e}{da_\alpha} = \frac{d\nu(\mathbf{B}^e)}{d\mathbf{B}^e} (\nabla \times \vec{w}_\alpha). \quad (4.18)$$

Durch Substitution von \mathbf{B}^e durch $(\mathbf{B}^e)^2$ sowie anschließende Anwendung der Kettenregel folgt bei rückwärtigem Einsetzen von Gleichung (4.15) der Ausdruck

$$(\mathbf{K}_{\nu,\text{inc}}^e(\mathbf{b}^{(k)}))_{i',\alpha} = \int_{V_e^e} \left(\nabla \times \vec{w}_\alpha \cdot \left(\underbrace{2\mathbf{B}^e \frac{d\nu(\mathbf{B}^e)}{d(\mathbf{B}^e)^2} (\mathbf{B}^e)^T}_{\bar{\nu}_{\text{inc}}} \right) \cdot \nabla \times \vec{w}_{i'} \right) dV \quad (4.19)$$

für die Einträge der inkrementellen Steifigkeitsmatrix. Die benötigte erste Ableitung der verwendeten skalaren Materialcharakteristik $\nu(B)$ wird dabei unter Betragsbildung anhand der gegebenen Daten über

$$\frac{d\nu}{d(B^2)} = \frac{1}{2B} \frac{d\nu}{dB} \quad (4.20)$$

analog zu Gleichung (4.13) am Arbeitspunkt P ausgewertet. Der Tensor der inkrementellen Reluktivität $\bar{\nu}_{\text{inc}}$ ist durch das dyadische Produkt vollbesetzt, bleibt jedoch im hier betrachteten Fall eines skalaren Sättigungsmodells symmetrisch. Aus den lokalen Matrizen entsteht analog zu Gleichung (3.109) die globale Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_F = \mathbf{K}_{\nu,d} = \sum_{e=1}^T \mathbf{Q}_e^T \mathbf{K}_{\nu,c}^e \mathbf{Q}_e + \sum_{e=1}^T \mathbf{Q}_e^T \mathbf{K}_{\nu,\text{inc}}^e \mathbf{Q}_e \quad (4.21)$$

zur Verwendung im Newton-Verfahren. Die entsprechenden Matrizen müssen in jedem, im Zeitschritt $n+1$ erforderlichen nichtlinearen Iterationsschritt k neu aufgebaut beziehungsweise aktualisiert werden.

Wird der zusätzliche Term in Form der inkrementellen Steifigkeitsmatrix nicht berücksichtigt, so ergibt sich das im Rahmen der Methode der Finiten Integration bereits beschriebene Verfahren der sukzessiven Substitution. Der zusätzliche Aufwand im Vergleich zu letzterem besteht in diesem Fall im Aufbau der inkrementellen Steifigkeitsmatrix, die jedoch dieselbe Besetzungsstruktur aufweist wie die Sehnen-Reluktivitätsmatrix. In einer parallelen Programmumgebung erfolgt eine Verteilung des Matrixaufbaus auf verschiedene Prozesse. Somit kann eine sehr hohe Skalierbarkeit bei der Ausführung dieses Arbeitsschrittes erzielt werden.

4.2.2 Homogenisierung des lamellierten Eisenmaterials

Aufgrund des lamellierten Aufbaus des ferromagnetischen Magnetjochs weist dieses ein anisotropes Materialverhalten sowohl bezüglich der Leitfähigkeit σ als auch der Reluktivität

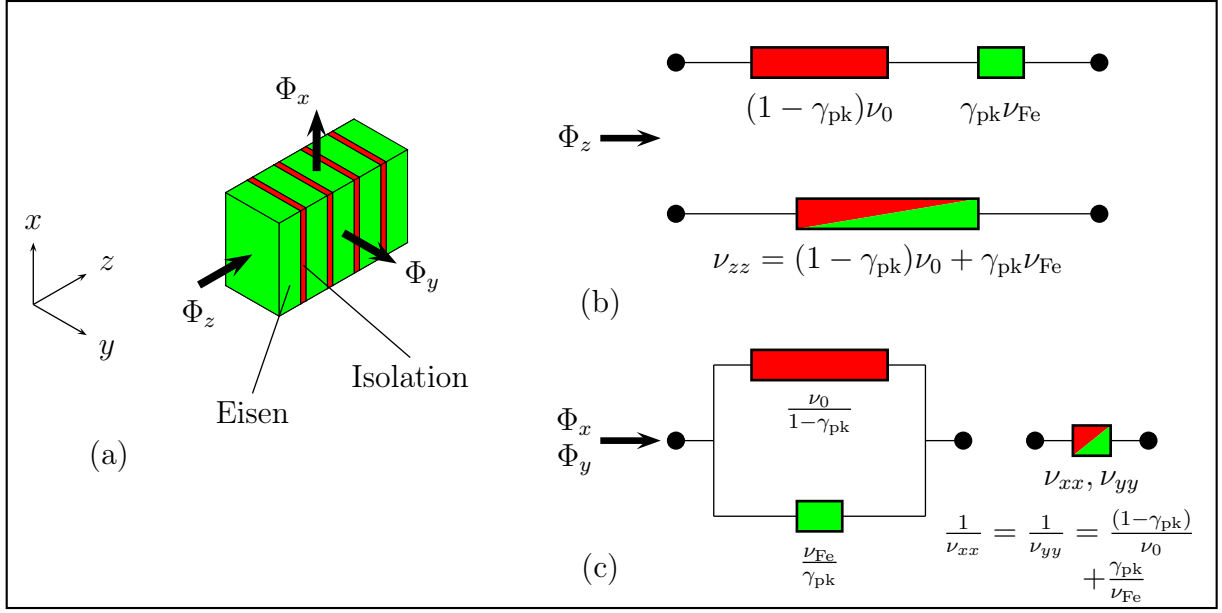


Abbildung 4.6: (a) Struktur des lamellierten Jochmaterials bei vergrößerter Darstellung der Dicke der Isolationsschicht; Homogenisierung der Reluktivität (b) in z -Richtung über eine Reihenschaltung und (c) in x - und y -Richtung über eine Parallelschaltung magnetischer Widerstände $R_m = \nu\ell/A$ in Verbindung mit normierten Längen ℓ und Flächen A .

ν auf. Da eine Auflösung des geschichteten Aufbaus innerhalb eines Volumendiskretisierungsverfahrens aufgrund der großen Unterschiede in der räumlichen Ausdehnung zwischen der Dicke der Isolationsschicht sowie der Gesamtlänge des Magneten nicht in Frage kommt, wird eine Homogenisierungsstrategie angewandt. Der Aufbau des Jochmaterials ist in Abbildung 4.6(a) zusammen mit den kartesischen Komponenten des magnetischen Flusses Φ schematisch dargestellt. Aus Gründen der Anschauung ist die Dicke der Isolationsschicht im Verhältnis zur Ausdehnung der Eisenbleche stark vergrößert gewählt. Bei einer, im hier betrachteten Fall des SIS-100-Magneten gegebenen, Ausrichtung entlang der kartesischen Koordinatenachsen nehmen die entsprechenden Materialparameter die Gestalt diagonalen Tensoren an. Diese lauten

$$\bar{\bar{\nu}} = \begin{pmatrix} \nu_{xx}(\mathbf{B}) & 0 & 0 \\ 0 & \nu_{yy}(\mathbf{B}) & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{zz}(\mathbf{B}) \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

wobei hier aufgrund der Isolationsschicht zwischen den einzelnen Eisenblechen $\sigma_{zz} = 0$ angenommen werden kann. Für die übrigen Koeffizienten ist im Rahmen der durchgeführten Homogenisierung der Anteil des Eisens V_{Fe} am Gesamtvolumen V_{Joch} des Magnetjochs

maßgeblich. Dieses Verhältnis beschreibt der sogenannte **Packungsfaktor** γ_{pk} , der durch

$$\gamma_{\text{pk}} = \frac{V_{\text{Fe}}}{V_{\text{Joch}}} \quad (4.23)$$

gegeben ist. Typische, bei der Herstellung für γ_{pk} erreichbare Werte liegen zwischen 0.95 und 1. Unter Verwendung einfacher Ersatzschaltbilder können resultierende magnetische Widerstände $R_{\text{m}} = \nu \ell / A$ mit normierten Längen ℓ und Flächen A ermittelt werden. Dies erfolgt separat für die drei Koordinatenrichtungen. Der magnetische Fluss Φ_z erfährt, wie in Abbildung 4.6(b) dargestellt, eine Reihenschaltung der magnetischen Widerstände des Eisens $R_{\text{m,Fe}} = \nu_{\text{Fe}} \gamma_{\text{pk}} \ell / A$ sowie des Isolationsmaterials $R_{\text{m,iso}} = \nu_0 (1 - \gamma_{\text{pk}}) \ell / A$. Letzteres kann aufgrund des im allgemeinen nicht magnetischen Verhaltens von Isolatoren mittels der Reluktivität ν_0 beschrieben werden kann. Damit gilt

$$R_{\text{m},z} = R_{\text{m,Fe}} + R_{\text{m,iso}} \quad \Leftrightarrow \quad \nu_{zz} = \gamma_{\text{pk}} \nu_{\text{Fe}} + (1 - \gamma_{\text{pk}}) \nu_0 \quad (4.24)$$

bei beliebiger Wahl der Bezugslängen und -flächen ℓ und A . Im Rahmen der hier angenommenen Ausrichtung der lamellierten Struktur im kartesischen Koordinatensystem erfahren sowohl der magnetische Fluss in x - als auch in y -Richtung eine Parallelschaltung der magnetischen Widerstände $R_{\text{m,Fe}} = \nu_{\text{Fe}} \ell / (A \gamma_{\text{pk}})$ und $R_{\text{m,iso}} = \nu_0 \ell / (A (1 - \gamma_{\text{pk}}))$ gemäß Abbildung 4.6(c). Somit folgt, analog zu Gleichung (4.24), für die Komponenten ν_{xx} und ν_{yy} des Reluktivitätstensors

$$G_{\text{m},x} = G_{\text{m},y} = G_{\text{m,Fe}} + G_{\text{m,0}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\nu_{xx}} = \frac{1}{\nu_{yy}} = \frac{\gamma_{\text{pk}}}{\nu_{\text{Fe}}} + \frac{(1 - \gamma_{\text{pk}})}{\nu_0}, \quad (4.25)$$

wobei die magnetischen Leitwerte gemäß $G_{\text{m},(\cdot)} = 1/R_{\text{m},(\cdot)}$ definiert sind. Die auf diese Art erhaltenen Materialeigenschaften müssen in den in Abschnitt 4.2.1 beschriebenen nichtlinearen Lösungsprozess integriert werden.

Im Fall der Methode der Finiten Integration geschieht dies im Zuge der Bestimmung der Einträge der Sehnen-Reluktivitätsmatrix bei der Verwendung des sukzessiven Substitutionsverfahrens. Gemäß Abbildung 4.3(b) werden die flächenbasierten Einträge der Materialmatrix $\mathbf{M}_{\nu,c}$ ohnehin separat für die einzelnen Koordinatenrichtungen bestimmt. Daher kann das beschriebene Homogenisierungsverfahren an dieser Stelle direkt angewandt werden. Damit lauten die Einträge exemplarisch für die dargestellte Zelle in x - und z -Richtung

$$\mathbf{M}_{\nu,a} = \frac{\nu_{xx,1} + \nu_{xx,2}}{2} \frac{L_y L_z}{\tilde{L}_x} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{M}_{\nu,b} = \frac{\nu_{zz,1} + \nu_{zz,3}}{2} \frac{L_x L_y}{\tilde{L}_z}, \quad (4.27)$$

wobei zur Bestimmung von ν_{xx} sowie ν_{zz} in Gleichung (4.25) und Gleichung (4.24) für ν_{Fe} jeweils die aus der Materialcharakteristik gewonnenen Werte der Sehnen-Reluktivität

ν_c eingesetzt werden. Zur Modellierung der Isolationseigenschaft der Lamellierung in z -Richtung werden die innerhalb des Eisenmaterials liegenden dualen Flächen betrachtet. Da für den Vektor der induzierten Wirbelströme $\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{M}_\sigma \hat{\mathbf{e}}$ gilt, werden die zu besagten dualen Flächen korrespondierenden Einträge in \mathbf{M}_σ zu 0 gesetzt. Unter Verwendung der auf diese Art modifizierten Materialmatrix im Rahmen des Zeitintegrationsverfahrens ist sichergestellt, dass die berechneten Wirbelströme ausschließlich innerhalb der (x, y) -Ebene fließen.

Bei der Verwendung der Methode der Finiten Elemente wird die Anisotropie in den Materialkoeffizienten ν und σ bei der elementweisen Zusammenstellung der Steifigkeits- und Massenmatrizen berücksichtigt. Anstelle des skalaren Wertes der Leitfähigkeit wird in Gleichung (3.119) der entsprechend der Isolationseigenschaft in z -Richtung modifizierte Tensor $\bar{\bar{\sigma}}$ aus Gleichung (4.22) verwendet. Damit ist auch in diesem Fall die oben erwähnte, im Rahmen der Modellierung erwünschte, Restriktion für die berechneten Wirbelströme gegeben. Um die aus der Homogenisierung resultierende Anisotropie innerhalb des in Abschnitt 4.2.1 beschriebenen Newton-Verfahrens zu berücksichtigen, wird die differentielle Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\nu,d}$ in Form ihrer additiven Terme $\mathbf{K}_{\nu,c}$ und $\mathbf{K}_{\nu,inc}$ betrachtet. Bei der elementweisen Zusammenstellung der Sehnen-Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\nu,c}$ gemäß Gleichung (4.14) wird anstelle des Ausdrucks $\bar{\bar{1}}\nu_c$ mit der skalaren Sehnen-Reluktivität ν_c der durch die Homogenisierung erhaltene Tensor $\bar{\bar{\nu}}$ in Gleichung (4.22) verwendet. Dabei wird die dem aktuellen Sättigungsniveau entsprechende Sehnen-Reluktivität ν_c für die Größe ν_{Fe} eingesetzt. Demgegenüber bleibt die Konstruktion der inkrementellen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\nu,inc}$ unverändert wie in Gleichung (4.19) mit der Auswertung des skalaren Sättigungsmodells unter Verwendung der magnetischen Flussdichte im Mittelpunkt des Tetraeders P_c . Auf diese Art der Modellierung des Materials wird im folgenden unter der Bezeichnung „Materialmodell A“, wie im linken Teil von Abbildung 4.7 dargestellt, Bezug genommen.

Für Untersuchungen bei moderatem Sättigungsniveau in einem Bereich bis zu etwa 1.6 T kann eine weitere Vereinfachung der Modellierung vorgenommen werden [125]. Im hier vorliegenden Fall des SIS-100-Magneten ist die z -Komponente der magnetischen Flussdichte innerhalb des längshomogenen Teils des Jochs klein gegenüber den übrigen Flusskomponenten. Aus diesem Grund wird zur Bestimmung des Sättigungsniveaus im Rahmen des Materialmodells B, wie im rechten Teil von Abbildung 4.7 dargestellt, nur die x - und y -Komponente der magnetischen Flussdichte herangezogen. Die Berechnung der Einträge ν_{xx} und ν_{yy} des Reluktivitätstensor erfolgt anschließend übereinstimmend mit der Vorgehensweise im Fall des Materialmodells A. Für die Bestimmung von ν_{zz} wird jedoch der zum ferromagnetischen Eisen gehörige Anteil der Reluktivität gegenüber dem der Isolation vernachlässigt. Dementsprechend ergibt sich der differentielle Reluktivitätstensor als

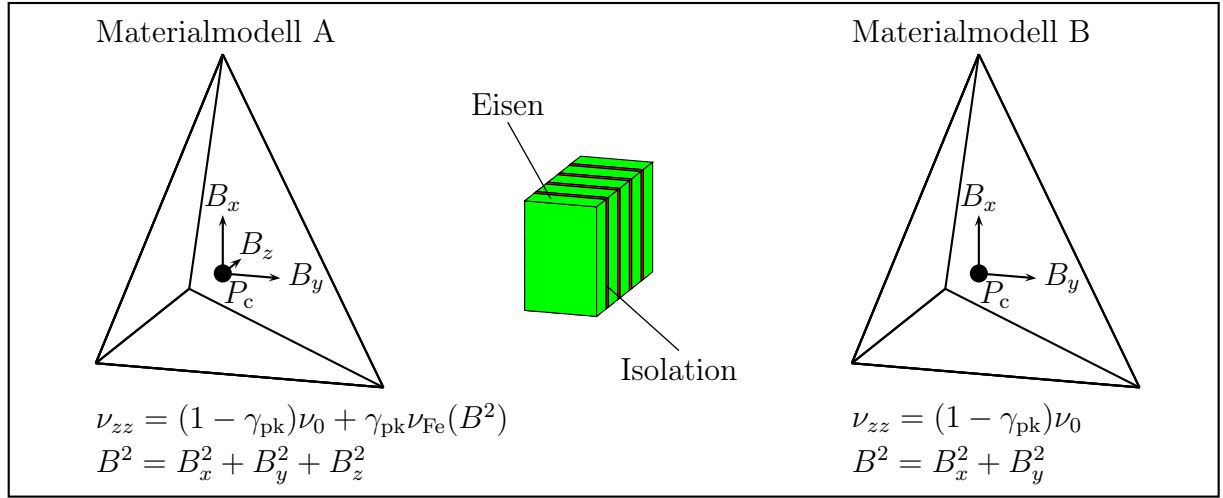


Abbildung 4.7: Lokale Beschreibung des anisotropen, nichtlinearen Magnetjochs unter Verwendung (a) des vollständigen Materialmodells A sowie (b) eines vereinfachten Materialmodells B.

Summe der entsprechend modifizierten Sehnen- und inkrementellen Reluktivitätstensoren zu

$$\bar{\bar{\nu}}_d = \begin{pmatrix} \nu_{xx}(\mathbf{B}) & 0 & 0 \\ 0 & \nu_{yy}(\mathbf{B}) & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \gamma_{pk})\nu_0 \end{pmatrix} + 2 \frac{d\nu}{d(\mathbf{B}^2)} \begin{pmatrix} B_x^2 & B_x B_y & 0 \\ B_y B_x & B_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Hintergrund dieses Vorgehens war an genannter Stelle die im seinerzeit eingesetzten kommerziellen Simulationswerkzeug fehlende Möglichkeit der nichtlinearen und vollständig anisotropen Modellierung. Der auf diese Weise gegenüber dem Materialmodell A zusätzlich erzeugte Modellierungsfehler ist in Abbildung 4.8(a) für verschiedene Werte des Packungsfaktors γ_{pk} aufgetragen. Da die magnetische Flussdichte keine eindeutige Funktion der Reluktivität ist, erfolgt die Darstellung des Fehlers gegenüber einer Auswahl an Werten der relativen Reluktivität ν_r , die gemäß Abbildung 4.8(b) zu entsprechenden Werten der magnetischen Flussdichte korrespondieren. Es wird deutlich, dass bei moderatem Sättigungsniveau die getroffene Vereinfachung nur zu einem geringen Fehler führt, der jedoch bei der hier verwendeten Materialkennlinie ab einer magnetischen Flussdichte von 1.5 T stark anwächst. Ebenso zeigt sich, dass bei der Vernachlässigung von Sättigungseffekten in z -Richtung im Fall gegen 1 strebender Werte von γ_{pk} eine negative Auswirkung auf die Genauigkeit der Simulation zu erwarten ist. Werden über das gesamte Magnetjoch gemittelte Größen, wie beispielsweise die Verlustenergie, betrachtet, fällt der mitunter große lokale Fehler jedoch quantitativ nicht entsprechend stark ins Gewicht [126]. Daher erscheint die Vereinfachung in bestimmten Fällen dennoch anwendbar. Der Einfluss des mit dem Mate-

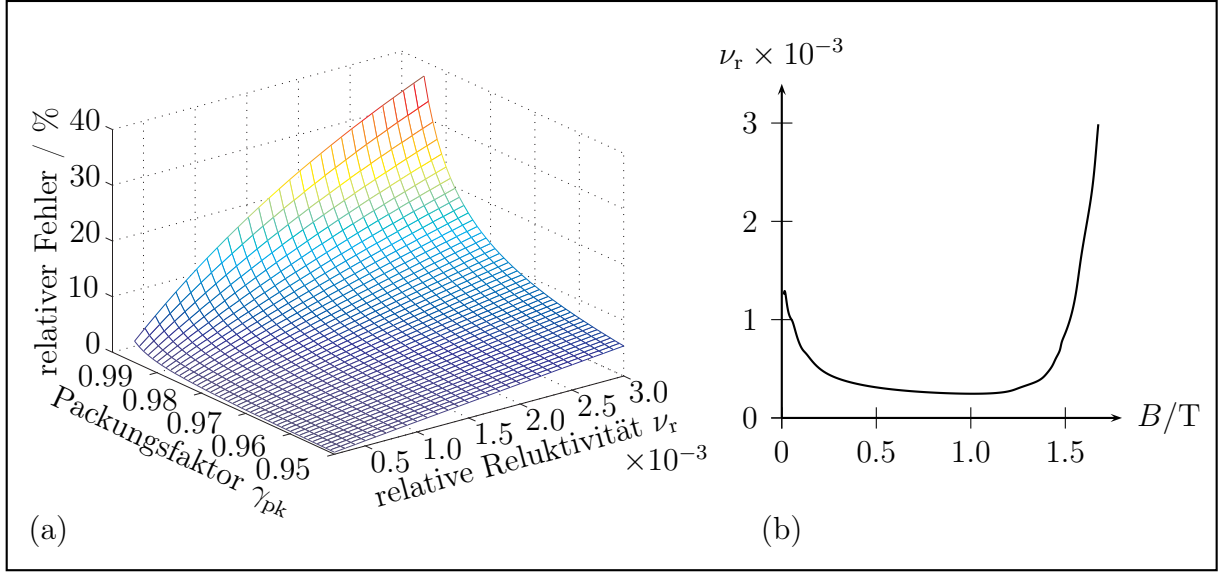


Abbildung 4.8: (a) Relativer Fehler beim Vergleich der aus Materialmodell A und B resultierenden Reluktivität ν_{zz} für unterschiedliche Werte des Packungsfaktors γ_{pk} sowie der relativen Reluktivität ν_r bei verschiedenen Sättigungsniveaus; (b) Sättigungsverhalten $\nu_r(B)$ gemäß der in Abbildung 4.4(a) eingeführten Kennlinie.

rialmodell B eingeführten Modellierungsfehlers auf die Höhe der Wirbelstromverluste im transienten Betrieb wird in Abschnitt 4.3 dieser Arbeit näher untersucht.

4.2.3 Modellierung des Strahlrohrs

Eine weitere Ursache sowohl für Joulesche Verluste innerhalb der Magnetanordnung als auch für eine Beeinträchtigung der Qualität des Dipolfeldes stellt das Strahlrohr dar, innerhalb welchem die zu beschleunigenden geladenen Partikel zirkulieren. An dieser Stelle wurde bei der Modellierung der supraleitenden Spule eine weitere Abstraktion vorgenommen. Im Gegensatz zu dem in Abbildung 4.1(a) dargestellten Aufbau aus acht einzelnen Kabeln wird auf dem das Kabelbündel einhüllenden rechteckigen Querschnitt, der entlang des Spulenpfades extrudiert wird, eine homogene Stromdichte eingeprägt. Diese ist dem tatsächlichen Spulenstrom im integralen Sinne äquivalent. Somit werden keine innerhalb der supraleitfähigen Spule stattfindenden Prozesse modelliert, sondern es erfolgt eine makroskopische Betrachtung der durch den homogen auf dem rechteckigen Querschnitt verteilten Strom hervorgerufenen Effekte. Der Aufbau des dahingehend vereinfachten Magnetmodells ist in Abbildung 4.9(a) dargestellt. Während die Ausdehnung des Magneten entlang der Strahlachse im hier betrachteten Prototyp 1 200 mm beträgt, liegt die in Abbil-

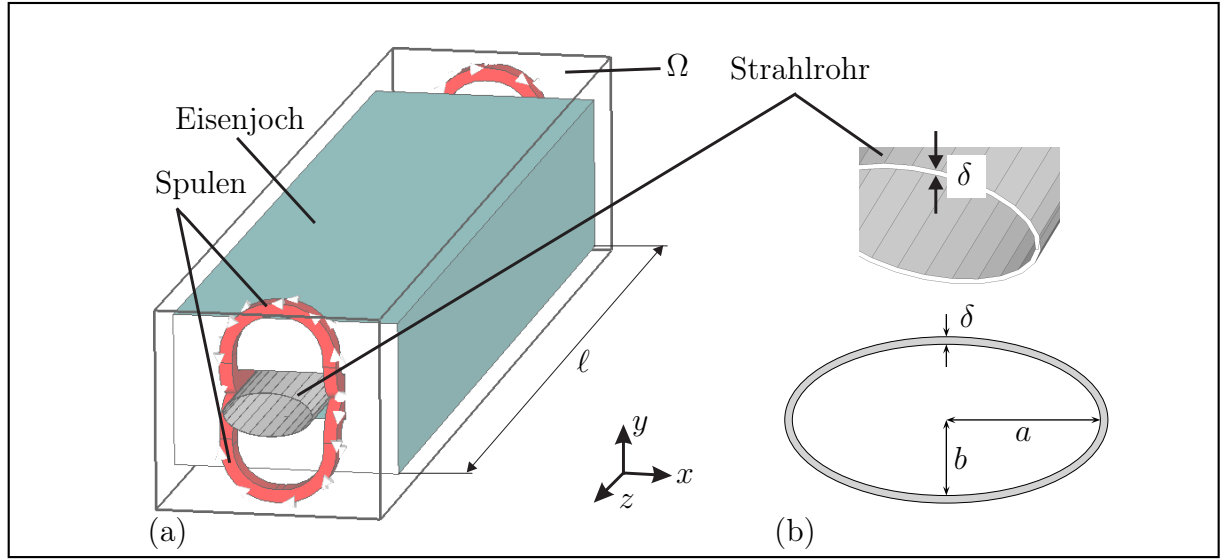


Abbildung 4.9: (a) Vereinfachtes Modell des SIS-100-Magneten mit einem im Öffnungsreich verlaufenden metallischen Strahlrohr; (b) vergrößerte Darstellung des elliptischen Strahlrohrs mit den Halbachsen a und b sowie der Dicke δ .

dung 4.9(b) vergrößert dargestellte Dicke des metallischen Strahlrohrs im Bereich zwischen $\delta = 0.3 \text{ mm}$ und $\delta = 0.5 \text{ mm}$. Aus den dadurch entstehenden Unterschieden in den räumlichen Längenverhältnissen in der Größenordnung von bis zu $1 \cdot 10^4$ resultieren mitunter Schwierigkeiten bei der Erzeugung einer gültigen Volumendiskretisierung. Insbesondere bei der Verwendung strukturierter, entlang der kartesischen Koordinatenachsen ausgerichteter Gitter ist eine sehr hohe Anzahl an Freiheitsgraden erforderlich, um die dünne, zudem gekrümmte, leitfähige Schicht aufzulösen, da in diesem Fall die Gitterlinien bis zum Rand des Rechengebietes fortgesetzt werden müssen. Diese Einschränkung kann durch den Einsatz von Untergittern teilweise überwunden werden [127]. Eine verbesserte Approximation der elliptischen Form des Strahlrohrs bietet ein unstrukturiertes Gitter unter Verwendung von Tetraedern. Jedoch entstehen aufgrund der großen Länge des Strahlrohrs im Vergleich zu seiner Dicke mitunter geometrische Simplizes mit unvorteilhaften Längenverhältnissen (engl. „*aspect ratio*“), die zu einer Verschlechterung der Konvergenzeigenschaften bei der numerischen Lösung der resultierenden Gleichungssysteme führen [128]. Im Rahmen der Methode der Finiten Elemente können unter den gegebenen Umständen spezielle **Oberflächenelemente** zur Modellierung dünner Schichten eingesetzt werden. Bei deren Verwendung muss keine explizite Volumendiskretisierung der dünnen Schicht erfolgen. Derartige Oberflächenelemente sind zum Einsatz in Verbindung mit einer Diskretisierung unter Verwendung hexagonaler Elemente sowohl für den Fall eines Luftspalts in hochpermeablen Materialien als auch für dünne, elektrisch leitfähige Schichten innerhalb von nicht leitfähigen Gebieten eingeführt worden [129]. Anhand des dreidimensionalen Modellproblems

eines durch dünne leitfähige Wände berandeten Würfels wurden die induzierten Wirbelströme unter Verwendung von Dreieckselementen auf der Berandung im Rahmen eines Integralgleichungsverfahrens bestimmt [130]. Weitere Verfahren, welche ebenfalls auf der Basis derartiger Oberflächenelemente innerhalb dreidimensionaler Volumendiskretisierungen konstruiert sind, lassen sich anhand ihres Anwendungsgebietes unterscheiden. Dazu wird die *äquivalente Leitschichtdicke* der elektromagnetischen Felder in einen Leiter, die im zeitharmonischen Fall gemäß

$$\delta_e = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (4.29)$$

für die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ gegeben ist, herangezogen. Als Merkmal zur Unterscheidung der verschiedenen Anwendungsbereiche wird das Verhältnis der äquivalenten Leitschichtdicke zur tatsächlichen Ausdehnung der leitfähigen Schicht δ betrachtet:

1. $\delta_e \gg \delta$: Für den Fall einer die Ausdehnung der leitfähigen Schicht übersteigenden äquivalenten Leitschichtdicke der Wirbelströme kann eine Einbettung der Oberflächenelemente in gängige magnetoquasistatische Formulierungen aus Abschnitt 2.3 im Frequenz- oder Zeitbereich erfolgen [131, 132, 133]. Diese Voraussetzung ist in der hier betrachteten Anordnung des dünnen Strahlrohrs in Verbindung mit der durch die Anwendung entstehenden Zeitkonstante gegeben. Die tangentielle Komponente des elektrischen Feldes ist stetig entlang der Schicht. Weiterhin wird keine Variation der elektromagnetischen Felder senkrecht zur Schicht modelliert.
2. $\delta_e \approx \delta$: Liegen äquivalente Leitschichtdicke und tatsächliche Schichtdicke in etwa in derselben Größenordnung, muss eine entsprechende Feldvariation senkrecht zur Schichtoberfläche modelliert werden. Das exponentielle Abklingen der Felder kann beispielsweise direkt, hier im Zusammenhang mit einer Randelementmethode, modelliert werden [134]. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Verwendung einer Knotenverdopplungsstrategie. Dabei werden den Knoten der einzelnen Dreiecke auf der diskretisierten Oberfläche jeweils zwei oder mehrere Freiheitsgrade zugewiesen, über die eine entsprechende Modellierung der Variation erfolgt [135, 136].
3. $\delta_e \ll \delta$: In diesem Fall, der bei hoher relativer Permeabilität, Leitfähigkeit oder Frequenz eintritt, bildet sich an der Oberfläche des leitfähigen Materials eine dünne Wirbelstromlage aus [137]. Bei der Verwendung eines Volumendiskretisierungsverfahrens müsste die Dicke dieser Schicht durch mehrere Elemente aufgelöst werden, um zuverlässige Simulationsergebnisse zu erzielen. Dies kann durch den Einsatz sogenannter Oberflächenimpedanz-Randbedingungen, die eine eindimensionale Approximation des Feldverlaufs innerhalb der Wirbelstromschicht enthalten, vermieden werden [138, 139, 140].

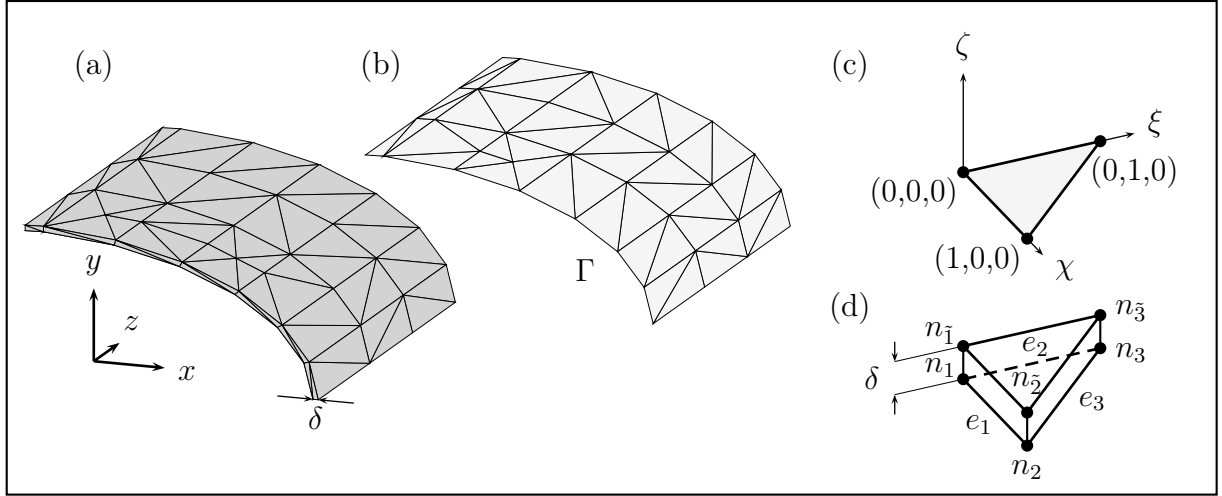


Abbildung 4.10: (a) Volumendiskretisierung eines Ausschnitts des Strahlrohrs; (b) Oberflächengitter auf demselben Ausschnitt; (c) Projektion der Oberflächendreiecke in das Referenzsystem (χ, ξ, ζ) mit $\zeta = 0$; (d) degeneriertes Prisma zur Definition der Oberflächenelemente.

4. $\delta_e \rightarrow 0$: Im Fall einer asymptotisch unendlichen Frequenz hat die äquivalente Leitschichtdicke formal den Wert 0 und es entstehen Oberflächenstromdichten am Rand des leitfähigen Materials. Dort verschwindet in diesem Fall die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte und es wird in der Folge eine ideale magnetische Abschirmung modelliert. In Form einer Approximation kann dieser Fall für Wirbelstromberechnungen bei hohen Frequenzen angenommen werden, vorausgesetzt, dass die Bedingung für die Anwendung der magnetoquasistatischen Näherung erfüllt ist [141].

Für den innerhalb der Anwendung zur Modellierung des metallischen Strahlrohrs im SIS-100-Magneten relevanten ersten Fall wird eine Herleitung von Oberflächenelementen unter Verwendung degenerierter Prismen verfolgt [142, 143]. Die in Abschnitt 4.2.1 und Abschnitt 4.2.2 beschriebene transiente Formulierung unter Berücksichtigung eines nichtlinearen, anisotropen Materialmodells wird um ein entsprechendes Modell zur effizienten Diskretisierung des leitfähigen Strahlrohrs erweitert. Dies geschieht auf der Basis zusätzlicher, zu den mit dem Strahlrohr assoziierten Freiheitsgraden des modifizierten magnetischen Vektorpotentials korrespondierenden Steifigkeits- und Massenmatrizen. Abbildung 4.10(a) zeigt einen Ausschnitt des Strahlrohrs ($\delta = 1$ mm), welcher einer groben Volumendiskretisierung mit einer vergleichsweise groben Schrittweite unterzogen wurde. Um die dabei unweigerlich entstehenden Tetraeder mit hohen Längenverhältnissen zu umgehen, wird zu einem, in Abbildung 4.10(b) dargestellten, Oberflächengitter Γ übergegangen. Somit muss die Schichtdicke nicht innerhalb der Volumendiskretisierung aufgelöst

werden, sondern es ist lediglich sicherzustellen, dass ein zur Berandung des Strahlrohrs konformes Gitter erzeugt wird. Die Dreiecke, welche aus der Oberflächentriangulierung entstehen, sind bei der Verwendung der niedrigsten geometrischen Ordnung planar, weisen jedoch eine beliebige Lage innerhalb des \mathbb{R}^3 auf. In Anlehnung an die Vorgehensweise zur Erstellung der Steifigkeits- und Massenmatrix im allgemeinen dreidimensionalen Fall erfolgen die weiteren Schritte der Herleitung in dem in Abbildung 4.10(c) eingezeichneten Referenzsystem $\hat{\mathbf{r}} = (\chi, \xi, \zeta)^T$, das mit den globalen Koordinaten über die Transformation $h : \hat{\mathbf{r}} \mapsto \mathbf{J}\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{r}_0$ verknüpft ist. Da für die entsprechend projizierten Dreiecke im Referenzsystem $\zeta = 0$ gilt, werden herkömmliche skalare beziehungsweise tangential stetige vektorielle Funktionen $w^{s,2d}$ und $\vec{w}^{tv,2D}$ zur Approximation in zwei Dimensionen angesetzt [67]. Dabei gehen letztere für den Fall niedrigster Ordnung analog zu Gleichung (3.77) aus den skalaren Ansatzfunktionen gemäß

$$\vec{w}_{i,j}^{tv,2D} = w_i^{s,2d} \nabla_{2D} w_j^{s,2d} - w_j^{s,2d} \nabla_{2D} w_i^{s,2d} \quad (4.30)$$

unter Verwendung des Gradienten ∇_{2D} in der (χ, ξ) -Ebene und den entsprechenden Knoten $i, j \in \{1, 2, 3\}$ in Abbildung 4.10(d) hervor. Im hier betrachteten Fall $\delta_e \gg \delta$ ist die tangentiale Komponente des magnetischen Vektorpotentials an der dreiecksförmigen Ober- und Unterseite des Prismas identisch. Damit stimmen die Koeffizienten der Ansatzfunktionen $\vec{w}_{\iota,\eta}^{tv,2D}$ für $\iota, \eta \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ und $\iota, \eta \in \{(\tilde{1}, \tilde{2}), (\tilde{1}, \tilde{3}), (\tilde{2}, \tilde{3})\}$ paarweise überein. In der Folge müssen die Koeffizienten der Ansatzfunktionen $\vec{w}_{1,\tilde{1}}^{tv,2D}$, $\vec{w}_{2,\tilde{2}}^{tv,2D}$ und $\vec{w}_{3,\tilde{3}}^{tv,2D}$ den Wert 0 aufweisen. Daher müssen die beiden letztgenannten Untergruppen tangential stetiger Ansatzfunktionen auf Prismen an dieser Stelle nicht berücksichtigt werden. In diesem Fall spricht man von einem degenerierten prismatischen Element [142]. Die aus einem Tensorprodukt mit der konstanten Funktion 1 in ζ -Richtung entstehenden dreidimensionalen Ansatzfunktionen werden im Rahmen des bereits beschriebenen Galerkin-Verfahrens zur Bestimmung der lokalen Elementmatrizen der Dimension (3×3) eingesetzt. Aufgrund der nach Konstruktion fehlenden Abhängigkeit von ζ kann die Integration über das Volumen des Prismas in dieser Richtung durch eine skalare Multiplikation mit der Schichtdicke δ ausgeführt werden. Damit sind die Einträge der resultierenden Steifigkeits- und Massenmatrizen für die Oberflächenelemente (OE) durch

$$(\mathbf{K}_\nu^{\text{OE},s})_{i,j,i',j'} = \delta \int_{\Gamma_s^e} \left(\left(\nabla_{2D} \times \vec{w}_{i,j}^{tv,2D} \right) \cdot \nu_s \cdot \left(\nabla_{2D} \times \vec{w}_{i',j'}^{tv,2D} \right) \right) dA, \quad (4.31)$$

$$(\mathbf{M}_\sigma^{\text{OE},s})_{i,j,i',j'} = \delta \int_{\Gamma_s^e} \left(\vec{w}_{i,j}^{tv,2D} \cdot \sigma_s \cdot \vec{w}_{i',j'}^{tv,2D} \right) dA \quad (4.32)$$

für das Oberflächendreieck mit dem Index s gegeben. Dabei erfolgt die Auswertung der Flächenintegrale gegebenenfalls unter Verwendung der Jacobi-Matrix der Transformation

h analog zum allgemeinen dreidimensionalen Fall. Das gesamte globale System wird durch die vorzeichenrichtige Addition der entsprechenden Einträge zu den bereits bestehenden Steifigkeits- und Massenmatrizen gemäß

$$\left(\mathbf{K}_\nu^{\text{tv}} + \sum_{s=1}^{N_D} \mathbf{Q}_s^T \mathbf{K}_\nu^{\text{OE},s} \mathbf{Q}_s \right) \mathbf{a} + \left(\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv}} + \sum_{s=1}^{N_D} \mathbf{Q}_s^T \mathbf{M}_\sigma^{\text{OE},s} \mathbf{Q}_s \right) \frac{d}{dt} \mathbf{a} = \mathbf{j}_e^{\text{tv}} \quad (4.33)$$

in zeitkontinuierlicher Notation mit der Gesamtzahl N_D an Oberflächendreiecken in Γ aufgebaut. Dabei wählen die Selektionsoperatoren \mathbf{Q}_s die zu dem Dreieck D_s gehörigen Einträge des Vektors der Freiheitsgrade für das magnetische Vektorpotential aus. Da die Anzahl der zur Diskretisierung der Oberfläche des leitfähigen Strahlrohrs eingesetzten Dreiecke verglichen mit der gesamten Größe des diskreten Modells gering ausfällt, ist der zusätzliche Aufwand zur Erstellung der Matrizen $\mathbf{K}_\nu^{\text{OE}}$ und $\mathbf{M}_\sigma^{\text{OE}}$ gegenüber der benötigten Gesamtzeit zum Aufbau der Finite-Elemente-Matrizen vernachlässigbar.

Durch die beschriebenen Vorgehensweise wird ein zusätzlicher Modellierungsfehler eingeführt. Unter der Voraussetzung einer äquivalenten Leitschichtdicke, welche die Wandstärke des Strahlrohrs wesentlich übersteigt, stellt der Einsatz der oben beschriebenen Oberflächenelemente niedrigster Ordnung jedoch eine gute Näherung zur Berechnung der in diesem Teil des gesamten Aufbaus induzierten Wirbelstromverluste zur Verfügung. Diesbezügliche Untersuchungen sowie die Ergebnisse einer numerischen Validierung des Ansatzes anhand eines einfachen Beispiels mit einer bekannten analytischen Lösung werden in Abschnitt 4.3 dieser Arbeit beschrieben.

4.3 Wirbelstromverluste bei zeitveränderlichem Betrieb

Bedingt durch die Leitfähigkeit des Eisenjochs sowie des Strahlrohrs sind im Rahmen der geplanten Anwendung des SIS-100-Magneten Joulesche Verluste aufgrund induzierter Wirbelströme zu erwarten. Um die durch die erforderliche Kühlung entstehenden Betriebskosten zu begrenzen, sollten die in der auf 4.5 K temperierten Magnetanordnung anfallenden Verluste so gering wie möglich gehalten werden. Auf der Basis eines bestehenden supraleitenden Designs werden daher entsprechende Untersuchungen mit dem Ziel der Reduktion dieser Verluste durchgeführt [108]. Diese Untersuchungen verlaufen parallel auf der Basis von numerischen Simulationen sowie von Messungen an entsprechend konstruierten Prototypen. Innerhalb der in diesem Abschnitt behandelten Simulationen wird der in Abbildung 4.11(a) dargestellte zeitliche Verlauf der anregenden Stromdichte verwendet. Dieser repräsentiert einen synthetischen, in der Praxis nicht vorkommenden Betriebszustand, welcher zu dem Extremfall der zu erwartenden Wirbelstromverluste korrespondiert.

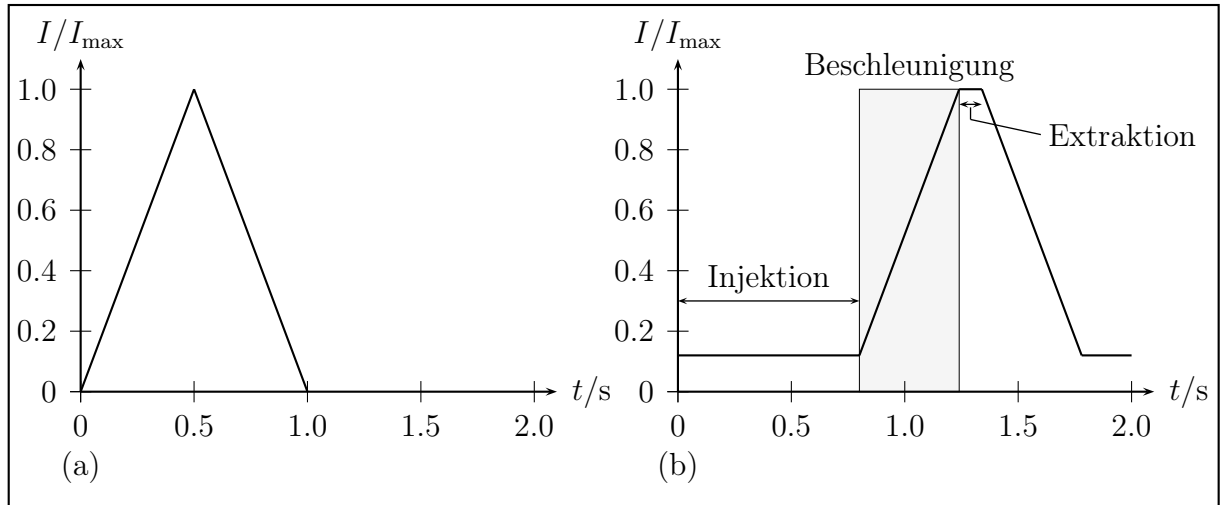


Abbildung 4.11: Zur Erzeugung der magnetischen Flussdichte im Rahmen der Simulationen eingesetzte Zeitsignale: (a) Synthetisches Profil, für welches die größten Wirbelstromverluste zu erwarten sind; (b) Realistischer Betriebsfall mit Strahlinjektion, Beschleunigungsphase und Strahlextraktion.

Er stellt hinsichtlich dieser Zielgröße eine Verschärfung des in Abbildung 4.11(b) gezeigten Betriebszyklus 2c dar [144]. In allen an dieser Stelle vorgestellten Simulationen wird über die in Abbildung 4.9(a) dargestellte vereinfachte Spulenmodellierung auf dem das tatsächliche Spulenprofil einhüllenden Rechteck ein homogener Strom von 48 kA eingeprägt. Dies entspricht einem Strom von 6 kA in jedem der einzelnen acht Kabel aus Abbildung 4.1. Auf diese Art wird die gewünschte magnetische Flussdichte von 2.1 T im Öffnungsbereich des Magneten zum Zeitpunkt des maximalen Anregungsstroms erreicht. Für die folgenden Untersuchungen wird eine vereinfachte Referenzgeometrie für das Magnetjoch sowie den Verlauf der Spulen verwendet. Weitere Anbauteile sowie die zur Verbesserung der Feldqualität vorgeschlagenen Modifikationen werden dabei zunächst nicht berücksichtigt. Bei der Ausgangsstruktur handelt es sich um die Anordnung aus Abbildung 4.1(a) mit einer Jochlänge von 1.2 m. Anhand dieses Referenzmodells kann ein Vergleich zwischen den von verschiedenen Gruppen erzielten Ergebnissen durchgeführt werden. Während sich die drei folgenden Abschnitte mit den im Magnetjoch entstehenden Wirbelstromverlusten befassen, wird in Abschnitt 4.3.4 auch das Strahlrohr über das in Abschnitt 4.2.3 beschriebene Verfahren in die Simulation einbezogen. Nicht alle der im folgenden dargestellten Ergebnisse wurden mit demselben Simulationstool erzielt. Entsprechende Informationen zu der im einzelnen verwendeten Implementierung werden an der jeweiligen Stelle angegeben.

4.3.1 Modifikation der Ausführung des Eisenjochs und der Spulen

Als Hauptquelle von Wirbelstromverlusten im Magnetjoch kann das Auftreten einer signifikanten Komponente der magnetischen Flussdichte senkrecht zur Ebene der Lamellierung im Endbereich des Magneten identifiziert werden. Daher können verschiedene Strategien gewählt werden, die zu der gewünschten Reduktion der Verluste führen:

1. Die Verluste sind hauptsächlich mit dem Endbereich des Magneten assoziiert. Daher führt eine Verlängerung der einzelnen Magnete bei gegebenem Synchrotron-Umfang zu einer Reduktion der im gesamten Ring entstehenden Verluste um den ungefähren Wert des gewählten Verlängerungsfaktors. Um die gewünschte Größe der Apertur aufrechtzuerhalten, wird eine entsprechende Krümmung in Strahlrichtung vorgesehen [144].
2. Die unerwünschte Komponente der magnetischen Flussdichte wird durch die senkrecht zur Strahlrichtung verlaufende Krümmung der Spulen hervorgerufen. Durch eine Veränderung, insbesondere in Form einer flacheren Ausführung, kann die Größe dieser Feldkomponente, und in der Folge auch die Höhe der entstehenden Wirbelstromverluste, reduziert werden [117, 145].
3. Die zu den Jouleschen Verlusten führenden Wirbelströme fließen innerhalb der Ebene der Lamellierung. Durch die Unterbrechung der Wirbelstrompfade beziehungsweise deren Verkürzung kann ebenfalls eine Reduktion der im transienten Betrieb auftretenden Verluste herbeigeführt werden. Dies geschieht durch die Einführung horizontaler oder vertikaler Schnitte parallel zur Strahlrichtung im Endbereich des Magneten [115, 116]. Ferner kann ein ähnlicher Effekt durch das Einsetzen von Blöcken aus SMP-Material (engl. „*sintered magnetic powder*“) erzielt werden. Derartige Materialien weisen eine vergleichsweise hohe Permeabilität auf, ihre elektrische Leitfähigkeit ist jedoch aufgrund ihrer mikroskopischen Struktur bestehend aus einzelnen Körnern sehr gering. Damit sind sie geeignet, um die induzierten Wirbelströme bei etwa gleichbleibenden magnetischen Eigenschaften zu reduzieren.

Durch das bei der Verfolgung von Strategie 1 vergrößerte zu betrachtende Volumen steigen die Anforderungen an die Rechenzeit sowie die benötigte Simulationshardware noch weiter an. Daher werden im folgenden zunächst die beiden alternativen Vorgehensweisen anhand der in Abbildung 4.12 dargestellten acht unterschiedlichen Magnetkonfigurationen numerischen Simulationen unterzogen. In den in der ersten Zeile der matrixförmig angeordneten Konfigurationen ist das Magnetjoch jeweils mit der gegenüber dem Ausgangspunkt unveränderten Spulengeometrie ausgerüstet. Bei den in der zweiten Zeile dargestellten Konfigurationen kommt eine mit einem flacheren Endbereich gemäß Strategie 2 versehene Spulen-

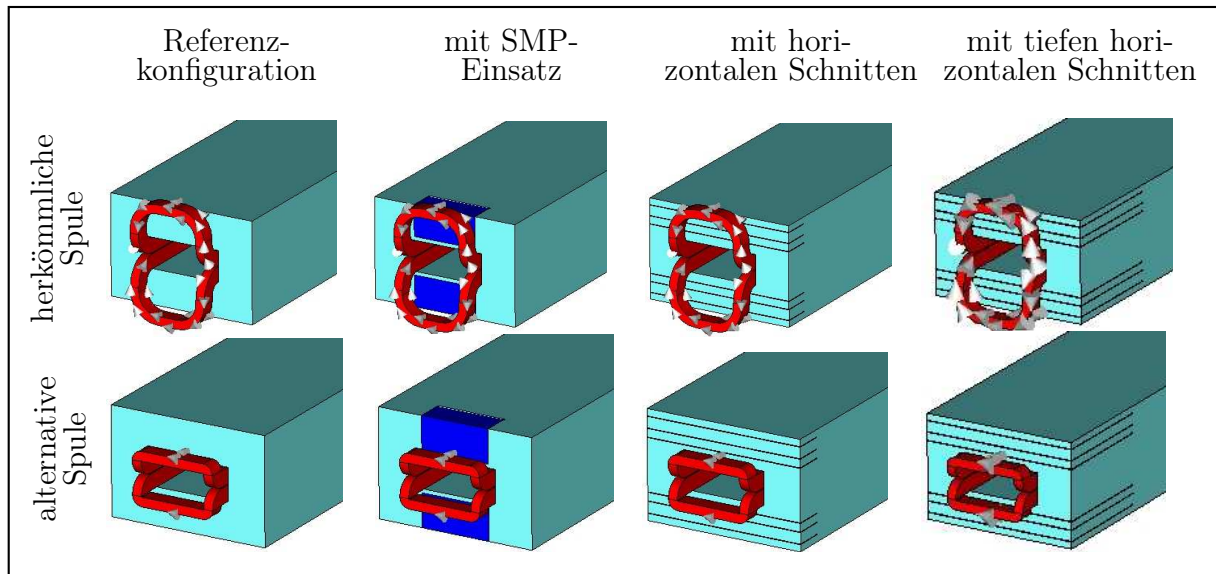


Abbildung 4.12: *Untersuchte Joch- und Spulenkonfigurationen zur Reduktion der Wirbelstromverluste im Magnetjoch.*

anordnung zum Einsatz. Demgegenüber sind in den einzelnen Spalten von Abbildung 4.12 die unterschiedlichen Modifikationen des Magnetjochs laut Strategie 3 gegenübergestellt. Während die erste Spalte die Referenzkonfiguration beschreibt, sind in der zweiten Spalte Einsätze aus SMP-Material mit den Abmessungen $120\text{ mm} \times 116\text{ mm} \times 100\text{ mm}$ in x -, y - und z -Richtung zentral in die beiden Endbereiche an der Vorder- und Rückseite eingebracht worden. Die dritte Spalte zeigt entsprechende Modelle, bei welchen 50 mm tiefe horizontale Schnitte parallel zur Strahlachse an den drei Positionen $y = 45.56\text{ mm}$, $y = 60.6\text{ mm}$ sowie $y = 80.2\text{ mm}$ eingebracht wurden [146]. In der letzten Spalte beträgt die Tiefe der Schnitte unter Beibehaltung der vertikalen Positionen 200 mm.

Simulationen unter Verwendung der Methode der Finiten Integration

Um den Einfluss der verschiedenen aus Abbildung 4.12 ersichtlichen Modifikationen auf die an dieser Stelle interessierende Zielgröße der Wirbelstromverluste zu untersuchen, wird zunächst eine Simulationsreihe unter Einsatz der Methode der Finiten Integration zur räumlichen Diskretisierung auf kartesischen Gittern durchgeführt. Als Basis für die numerischen Simulationen dient die in Abschnitt 4.2.1 in Form von Gleichung (4.4) gegebene nichtlineare transiente Formulierung in Verbindung mit der Homogenisierungsstrategie zur Modellierung des lamellierten Eisenjochs aus Abschnitt 4.2.2. Die nachstehende Aufstellung beinhaltet eine Zusammenfassung des Simulationsablaufs sowie umfasst nähere Angaben zur Implementierung des verwendeten Simulationswerkzeuges und zu den Simulationsparametern:

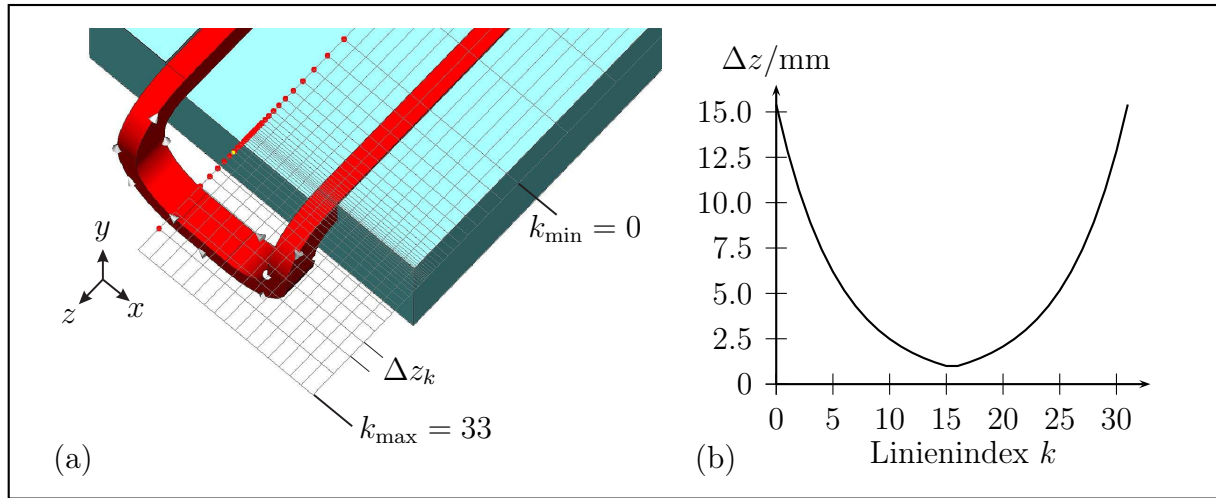


Abbildung 4.13: (a) Exemplarische Darstellung des in den Simulationen eingesetzten Gitters in (x, z) -Ebene; (b) Veranschaulichung der lokalen Verfeinerung anhand der Gitterschrittweite Δz_k , die über einem relativen Gitterindex k aufgetragen ist.

- *Vorbereitungen:* Die Geometrie des Magnetjochs sowie die supraleitenden Spulen in ihrer abstrahierten Form werden in CST EM STUDIO[®] modelliert [147]. An dieser Stelle wird den entsprechenden geometrischen Objekten bereits ein Satz der benötigten linearen Materialparameter zugewiesen. Aufgrund der bestehenden dreifachen räumlichen Symmetrie bezüglich der kartesischen Koordinatenachsen muss lediglich ein Achtel des gesamten Magneten betrachtet werden. Der spezielle Aufbau des für die Simulationen verwendeten Gitters ist in Abbildung 4.13(a) anhand der Ausgangskonfiguration für Magnetjoch und Spulengeometrie in der (x, z) -Ebene dargestellt. Abbildung 4.13(b) zeigt die zur Auflösung der Eindringtiefe $\lambda_e = 2\pi\delta$ der erwarteten Wirbelströme angewandte Verfeinerung in z -Richtung im Endbereich des Magneten. Die räumliche Verteilung des Anregungsstroms in den Spulen wird auf der Basis dieses Gitters bestimmt. Da zum Zeitpunkt der Durchführung der Simulationen die benötigte Funktionalität in CST EM STUDIO[®] selbst und auch in anderen kommerziellen Produkten nicht vorhanden war, erfolgen die weiteren Schritte in einem separaten Simulationswerkzeug auf der Basis von MATLAB[®] [148].
- *Simulationswerkzeug:* Das Simulationswerkzeug basiert auf einer klassenbasierten Sammlung von MATLAB[®]-Skripten. Die im Vorbereitungsschritt gewonnenen Gitter- und Materialdaten sowie der Vektor der eingepprägten Stromdichte im Bereich der Spule werden im Rahmen des Programmablaufs eingelesen. Anschließend erfolgt auf der Basis dieser Daten der Aufbau der Systemmatrizen und die transiente numerische Simulation unter Verwendung der bereits angegebenen Modellierungsstrategien.

- *Materialparameter:* Die nichtlineare Kennlinie für die zum Aufbau des Magnetjochs verwendeten Stahlbleche ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Der Packungsfaktor im Rahmen des verwendeten Materialmodells A beträgt in dieser Simulationsreihe $\gamma_{\text{pk}} = 0.98$. Für die anisotrope Leitfähigkeit des Jochstahls wird $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 3.2 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ bei $\sigma_{zz} = 0$ angesetzt. Demgegenüber wird für das SMP-Material eine isotrope Leitfähigkeit von $\sigma = 1.0 \cdot 10^4 \text{ S/m}$ innerhalb der Simulationen verwendet.
- *Modellierung der Schnitte:* Bei der Eingabe der Geometrie wird deren Ausrichtung so gewählt, dass die in den entsprechenden Konfigurationen einzubringenden Schnitte in einer der kartesischen Koordinatenebenen liegen. Die Modellierung der unterbrechenden Wirkung der Schnitte auf die Wirbelstrompfade kann somit durch eine Modifikation der Einträge der Materialmatrix \mathbf{M}_σ analog zur Vorgehensweise bei der Einbringung der anisotropen Leitfähigkeit des Magnetjochs erfolgen. Dazu wird die automatische Gittergenerierung durch das Setzen von Fixpunkten so beeinflusst, dass stets eine duale Fläche an der gewünschten Position des entsprechenden Schnittes entsteht. Die mit den resultierenden Flächen assoziierten Einträge werden vor der eigentlichen Lösung des Gleichungssystems zu 0 gesetzt.
- *Randbedingungen:* Für die durchgeführten Simulationen wird die Begrenzung des Rechengebiets in einem Abstand zum Magnetjoch von 10 mm in x -Richtung sowie mit jeweils 60 mm in y - und z -Richtung gesetzt. An den entsprechenden Randflächen wird eine homogene Dirichlet-Bedingung für das magnetische Vektorpotential eingeprägt. Zur Modellierung der kartesischen Symmetriebedingungen wird bei $x = 0$ sowie $z = 0$ ebenfalls eine homogene Dirichlet-Randbedingung angelegt. Die Spiegelsymmetrie bei $y = 0$ wird hingegen unter Verwendung einer homogenen Neumann-Randbedingung modelliert.
- *Numerische Lösung:* Im Rahmen des an dieser Stelle zur Linearisierung eingesetzten Verfahrens wird als Abbruchkriterium der nichtlinearen Iteration eine Residuenbeschränke von $\epsilon_{\text{nl}} = 1 \cdot 10^{-2}$ verwendet. Zur zeitlichen Diskretisierung mit der Θ -Methode bei $\Theta = 2/3$ wird ein konstanter Zeitschritt $\Delta t = 10 \text{ ms}$ eingesetzt. Die entstehenden linearen Gleichungssysteme werden mithilfe eines vorkonditionierten cg-Verfahrens (engl. „conjugate gradients“) bis zu einer Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-8}$ bezüglich des relativen Residuums gelöst. Die Konditionszahl der Systemmatrizen ist durch die erheblichen Sprünge in der Größe der Materialparameter sowie bedingt durch das verwendete stark anisotrope Gitter in Abbildung 4.13(a) sehr hoch. Daher empfiehlt sich der Einsatz eines leistungsfähigen Vorkonditionierers in Form eines algebraischen Mehrgitterverfahrens (AMG). Dazu wird im Rahmen des MEX-Interfaces von MATLAB® [148] der ML-Vorkonditionierer [149] aus der TRILINOS-Bibliothek

[150] eingesetzt. Dieser enthält ein Modul, welches separate Prolongations- und Restriktionsoperatoren für den Bild- und Nullraum des doppelt angewandten Rotationsoperators verwendet und somit zur Anwendung auf die bestehende Problemstellung geeignet ist. Eine Voraussetzung für die erfolgreiche Anwendung stellt jedoch die Regularität der in der Formulierung enthaltenen Massenmatrix dar, die mit der elektrischen Leitfähigkeit innerhalb des betrachteten Gebietes verbunden ist [151]. Aus diesem Grund wird im Modell enthaltenen, nicht leitfähigen Gebieten eine von Null verschiedene Leitfähigkeit $\sigma_{\text{reg}} = 0.1 \text{ S/m}$ zugewiesen. Durch diese Regularisierung wird allerdings die mathematische Charakterisierung der Problemstellung verändert, da es sich nun um ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen (engl. „*ordinary differential equations*“, ODE) handelt und nicht mehr um ein Differential-Algebraisches System (engl. „*differential-algebraic equations*“, DAE) mit dem Index eins. Für das verwendete zeitliche Integrationsverfahren ist diese Veränderung jedoch irrelevant. Gegebenenfalls führt der Modellierungsfehler lediglich zu einer Überschätzung der tatsächlichen Wirbelstromverluste gegenüber einer Simulation ohne den Einsatz einer Regularisierung. Da ein Vorkonditionierer ohnehin eine Approximation der Inversen des zu lösenden Systems beschreibt, kann ein verbesserter Algorithmus formuliert werden, indem die Regularisierung nur beim Aufbau des Vorkonditionierers zum unveränderten System eingesetzt wird. Von dieser Möglichkeit wurde jedoch an dieser Stelle kein Gebrauch gemacht.

- *Nachbearbeitung:* Die ermittelten numerischen Lösungen werden zum einen direkt innerhalb von MATLAB[®] ausgewertet und zum anderen über entsprechende Export-Skripte in das von CST EM STUDIO[®] verwendete Format konvertiert. Somit stehen dieselben Visualisierungsmöglichkeiten wie bei einer entsprechenden direkten Simulation zur Verfügung.

Anzumerken ist, dass die beschriebene Implementierung auf der Basis einer 32-Bit-Architektur innerhalb von MATLAB[®] erfolgte. Daher steht auf einer Microsoft[®] Windows[®]-Plattform nur ein Adressraum von 2 GiB für den Arbeitsspeicher zur Verfügung. Dies führt, zusammen mit der begrenzt effizienten Speicherverwaltung, zu einer erheblichen Einschränkung der Modellgröße hinsichtlich der Anzahl der zur Approximation eingesetzten Freiheitsgrade. Um dennoch aussagefähige Ergebnisse erzielen zu können, wird daher manuell die in Abbildung 4.13 angedeutete starke Verdichtung der Gitterlinien im Endbereich des Magneten mit dem Ziel der räumlichen Auflösung der Eindringtiefe erzwungen. Weiterhin stellt die Einschränkung bezüglich der Anzahl an Freiheitsgraden auch den Grund für die angegebene Platzierung der Grenze des Rechengebietes nahe der modellierten Struktur dar. Durch die Wahl eines zu geringen Abstands entsteht ein zusätzlicher Modellierungsfehler, der jedoch an dieser Stelle nicht weiter betrachtet werden kann.

Im folgenden werden die mit der beschriebenen Methode erzielten Ergebnisse für die unterschiedlichen Kombinationen aus Modifikationen am Magnetjoch sowie an der Spulengeometrie aus Abbildung 4.12 diskutiert. Alle Simulationen wurden unter Verwendung einer groben sowie einer, im Hinblick auf die erwähnte Einschränkung, feineren Gitterauflösung durchgeführt. Die Wirbelstromleistung innerhalb eines Zeitschritts ist durch den analytischen Zusammenhang

$$P_v = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV \quad (4.34)$$

gegeben. Mithilfe der integralen Zustandsgrößen innerhalb der Methode der Finiten Integration kann die Verlustleistung unter Verwendung von $\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{M}_\sigma \hat{\mathbf{e}}$ über den Vektor \mathbf{p} mit den Einträgen

$$p_\xi^{(\chi)} = \hat{\mathbf{e}}_\xi^{(\chi)} (\mathbf{M}_\sigma)_{\xi,\xi}^{(\chi)} \hat{\mathbf{e}}_\xi^{(\chi)} \quad (4.35)$$

ausgewertet werden. Das Integrationsvolumen besteht dabei aus tertiären Zellen, die von den primären Kanten $L_\xi^{(\chi)}$ sowie den dualen Flächen $\tilde{A}_\xi^{(\chi)}$ aufgespannt werden [51]. Durch Summation über alle ξ in den Koordinatenrichtungen, wobei χ hier die x -, y - beziehungsweise z -Richtung bezeichnet, ergibt sich die Gesamtleistung im betrachteten Volumen. Dieser Zusammenhang lautet in Matrixform

$$P_{v,\text{dis}} = \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}_\sigma \hat{\mathbf{e}}. \quad (4.36)$$

Innerhalb der zur Zeitintegration verwendeten Θ -Methode bestimmt sich der zur Auswertung benötigte Vektor $\hat{\mathbf{e}}$ in der eingesetzten Formulierung als zeitliche Ableitung des modifizierten magnetischen Vektorpotentials zu

$$\hat{\mathbf{e}}^{(n)} = -\frac{\mathbf{a}^{(n)} - \mathbf{a}^{(n-1)}}{\Delta t}. \quad (4.37)$$

In jedem Zeitschritt wird somit aus dem Vektor der Freiheitsgrade des magnetischen Vektorpotentials \mathbf{a} die Höhe der induzierten Wirbelstromverluste im Magnetjoch gemäß Gleichung (4.36) bestimmt. Abbildung 4.14(a) zeigt den zeitlichen Verlauf der räumlich über das gesamte Magnetjoch integrierten Verlustleistung für die vier Magnetkonfigurationen, die mit der herkömmlichen Spule ausgerüstet und in Abbildung 4.12 in der ersten Zeile aufgeführt sind. Alle vier verzeichneten Kurven zeigen zwei ausgeprägte Maxima, die in vergleichbarer Höhe liegen. Dabei wird das erste aufgrund der Sättigung der Materialkennlinie und der daraus resultierenden Begrenzung der Anstiegsrate der magnetischen Flussdichte bereits etwa 0.1 s vor dem Zeitpunkt der maximalen Anregung bei $t = 0.5$ s erreicht. Es wird deutlich, dass durch die Präsenz des SMP-Materials im Endbereich eine Reduktion der Verlustleistung erzielt werden kann. Auch die Einführung horizontaler Schnitte sorgt für eine geringere Höhe der Wirbelstromverluste gegenüber dem Referenzzustand, wobei die Konfiguration mit 200 mm tiefen Schnitten eine weitere signifikante

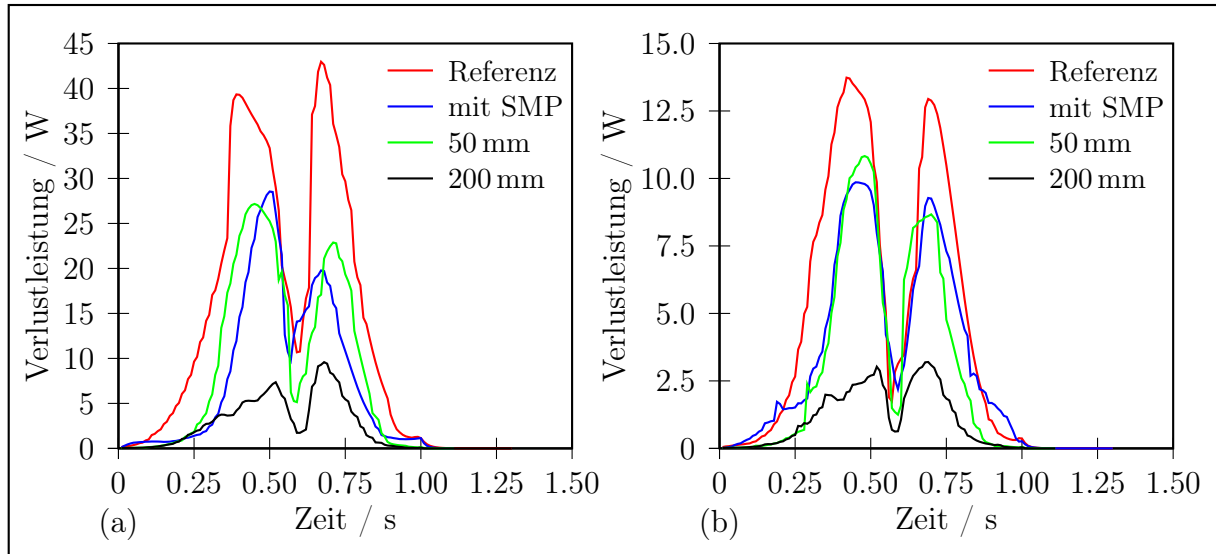


Abbildung 4.14: Zeitlicher Verlauf der Verlustleistung für die vier unterschiedlichen Konfigurationen des Magnetjochs gemäß Abbildung 4.12 auf der Basis der Referenzgeometrie, mit einem SMP-Einsatz sowie mit horizontalen Schnitten einer Tiefe von 50 mm und 200 mm. Es wird eine räumliche Diskretisierung mit $\pm 75\,000$ Freiheitsgraden verwendet: (a) In Verbindung mit der herkömmlichen Spule und (b) für die alternative Spulengeometrie bei einer um den Faktor drei gestreckten Ordinatenachse.

Verbesserung gegenüber der Ausführung mit 50 mm verspricht. Im Vergleich der beiden letztgenannten Konfigurationen fällt auf, dass deren zugeordnete Kurven bis zum Zeitpunkt $t = 0.25\text{ s}$ übereinstimmen, während für spätere Zeitpunkte im Fall der 50 mm tiefen Schnitte ein stärkerer Anstieg zu beobachten ist, als bei der Ausführung mit Schnitten einer Tiefe von 200 mm. Daraus können Rückschlüsse auf die zeitliche Variation der Eindringtiefe abhängig vom Sättigungsniveau gezogen werden. Aus der im Frequenzbereich gegebenen Gleichung (4.29) folgt, dass die Eindringtiefe bei abnehmender Permeabilität ansteigt. Genau dieser Fall tritt bei steigender magnetischer Flussdichte zum Zeitpunkt des Eintritts der Materialkennlinie in den Sättigungsbereich ein. Da die im Endbereich induzierten Wirbelströme bis zum genannten Zeitpunkt in beiden Konfigurationen gleichermaßen unterdrückt werden, liegt die Eindringtiefe offensichtlich unterhalb der 50 mm weit in das Magnetjoch reichenden Schnitte. Erst bei weiter ansteigender Sättigung und in der Folge weiter absinkender Permeabilität wird der Wert von 50 mm überschritten und eine merkliche Unterdrückung der Wirbelströme erfolgt nur noch innerhalb der Konfiguration mit 200 mm tiefen Schnitten.

Demgegenüber kann durch die Verwendung der alternativen Spulengeometrie, die in Abbildung 4.12 in der zweiten Zeile dargestellt ist, eine wesentlich deutlichere Reduktion

der Verlustleistung bereits ohne die Einführung der entsprechenden Modifikationen am Magnetjoch beobachtet werden. Der entsprechende zeitliche Verlauf der Verlustleistung ist für die verschiedenen Konfigurationen in Abbildung 4.14(b) aufgetragen. Qualitativ zeigt sich ein ähnliches Bild wie im vorherigen Fall, jedoch bei wesentlich geringeren Maximalwerten der Verlustleistung. Dies bestätigt die in Form von Strategie 2 formulierte Vermutung über die Abhängigkeit der entstehenden Verluste von der z -Komponente der magnetischen Flussdichte im Endbereich des Magneten, welche durch die flachere Spulen-anordnung vor allem im oberen Teil des Eisenjochs reduziert wird. Die Verwendung des SMP-Einsatzes sowie die Einführung horizontaler Schnitte führen ebenfalls zu einer geringeren Verlustleistung gegenüber der Referenzkonfiguration des Magnetjochs. Wiederum führt die Erhöhung der Tiefe der horizontalen Schnitte von 50 mm auf 200 mm zu einer weiteren signifikanten Reduktion der Wirbelstromverluste. Der Zeitpunkt, bis zu welchem ein übereinstimmender Verlauf der beiden Kurven beobachtet werden kann liegt in diesem Fall bei $t = 0.3$ s. Dies zeugt ebenfalls von den geringeren Werten der z -Komponente der magnetischen Flussdichte, da das zu einer Eindringtiefe von 50 mm korrespondierende Sättigungsniveau offensichtlich um 0.05 s später als im Fall der herkömmlichen Spulen-anordnung erreicht wird.

Zur Untersuchung der räumlichen Verteilung der Wirbelstromverluste erfolgt deren gitterbasierte räumliche Integration lediglich in der (x, y) -Ebene. Die resultierende Verlustleistung innerhalb der in z -Richtung orientierten Unterquader wird anschließend mithilfe einer Newton-Cotes-Quadratur auf der Zeitachse unter Verwendung der von der Simulation vorgegebenen diskreten äquidistanten Zeitpunkte im Abstand Δt integriert. Abbildung 4.15(a) zeigt für den Fall der unveränderten Spulengeometrie die räumliche Verteilung der Verlustenergie welche in einem vollständigen Anregungszyklus freigesetzt wird bezüglich der z -Achse. Dabei liegt der gewählte Ursprung in der Mitte des insgesamt 1.2 m langen, in z -Richtung geometrisch invarianten Magnetjochs. Wiederum zeigt sich der Einfluss der verschiedenen Modifikationen am Eisenjoch gegenüber der Referenzkonfiguration in einer offensichtlichen Reduktion der Verlustenergie. Zusätzlich ist erkennbar, dass im Bereich der horizontalen Schnitte sowie des SMP-Einsatzes die durch die Wirbelströme deponierte Energie wesentlich niedriger ausfällt. Dennoch steigt die Verlustenergie in Richtung des Mittelpunktes des Magneten nach dem Ende der zugehörigen Modifikation bei $z = 0.55$ m zunächst wieder an, um dann in Richtung $z = 0$ wiederum zum Wert 0 abzuklingen. Ebenfalls wird deutlich, dass der Einsatz des SMP-Materials im direkten Vergleich innerhalb von 50 mm von der Endfläche des Jochs gesehen ein besseres Verhalten hinsichtlich der Reduktion der Verlustenergie verglichen mit den horizontalen Schnitten derselben Ausdehnung in z -Richtung zeigt. Dennoch ist die letztgenannte Modifikation mitunter vorzuziehen, da in diesem Fall kein Verlust an relativer Permeabilität im Endbereich entsteht. Erwartungsge-

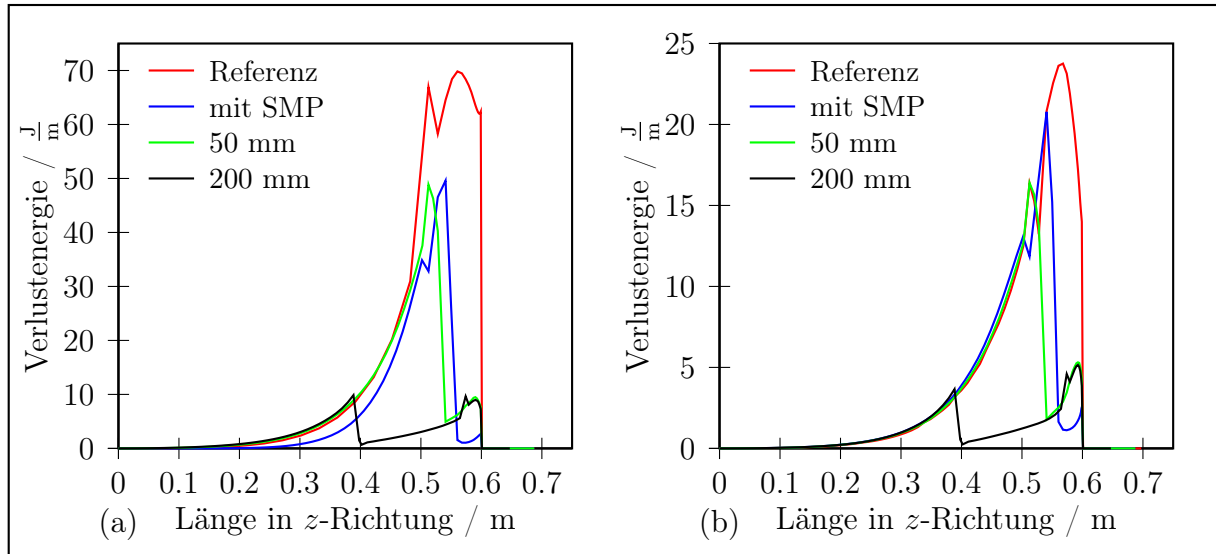


Abbildung 4.15: Verlauf der Verlustenergie für vier verschiedene Konfigurationen des Magnetjochs gemäß Abbildung 4.12 über der Länge in z -Richtung unter Verwendung einer räumlichen Diskretisierung mit $\pm 75\,000$ Freiheitsgraden: (a) Bei Verwendung der herkömmlichen Spule und (b) für die alternative Spulengeometrie bei einer um den Faktor drei gestreckten Ordinatenachse.

mäß stimmt der räumliche Verlauf der Verlustenergie für die beiden Konfigurationen unter Verwendung horizontaler Schnitte im Bereich zwischen $z = 0,55$ m und $z = 0,6$ m überein. In Richtung $z = 0$ erfolgt im Fall der 50 mm tiefen Schnitte eine erhebliche Zunahme der Verlustenergie, während für die tieferen Schnitte eine weitere Unterdrückung der Wirbelströme innerhalb der (x, y) -Ebene erfolgt. Diese Beobachtung bestätigt die weiter oben getroffenen Rückschlüsse auf die Eindringtiefe bezüglich des Sättigungsniveaus.

In Abbildung 4.15(b) sind die entsprechenden Kurven für die der zweiten Zeile in Abbildung 4.12 zugeordneten Magnetkonfigurationen unter Verwendung der alternativen Spulengeometrie verzeichnet. Qualitativ zeigen die Kurven einen ähnlichen Verlauf wie im Fall der unveränderten Spule. Die Maxima der einzelnen Kurven in der Nähe des Endbereichs bei $z = 0,6$ m liegen jedoch, wie anhand der Betrachtung des zeitlichen Verlaufs der Verlustleistung zu erwarten, ebenfalls auf wesentlich niedrigerem Niveau.

Die gesamte im Magnetjoch während des Simulationszyklus deponierte Energie wird aus der zeitlichen Integration des Verlaufs der Verlustleistung bestimmt. Zu diesem Zweck kommt wiederum eine einfache Newton-Cotes-Quadratur unter Verwendung der Abtastpunkte im Abstand Δt zum Einsatz. Für ein grobes Gitter mit etwa 10 000 Zellen und in der Folge 30 000 resultierenden Freiheitsgraden (engl. „degrees of freedom“, dofs) sind die Ergebnisse für die Verlustenergie in der ersten Datenspalte von Tabelle 4.1 eingetragen.

		grobes Gitter $\pm 30\,000$ dofs	feineres Gitter $\pm 75\,000$ dofs
herkömmliche Spule	Ausgangskonfiguration	18.13 J	16.84 J
	mit SMP-Einsatz	11.51 J	8.35 J
	mit horizontalen Schnitten (50 mm)	9.73 J	9.59 J
	mit horizontalen Schnitten (200 mm)	3.10 J	2.96 J
alternative Spule	Ausgangskonfiguration	5.72 J	5.46 J
	mit SMP-Einsatz	4.15 J	3.98 J
	mit horizontalen Schnitten (50 mm)	3.46 J	3.42 J
	mit horizontalen Schnitten (200 mm)	1.24 J	1.15 J

Tabelle 4.1: Gesamte, durch induzierte Wirbelströme im Eisenjoch über einen Anregungszyklus gemäß Abbildung 4.11(a) deponierte Energie bei der Verwendung zweier verschiedener Diskretisierungsstufen für die acht untersuchten Magnetkonfigurationen.

Die zweite Datenspalte enthält die bei der Verwendung einer Diskretisierung mit etwa 75 000 Freiheitsgraden erzielten Werte für die Verlustenergie. Sie korrespondieren zu dem jeweiligen zeitlich integrierten Verlauf der Verlustleistung aus Abbildung 4.14. Die zeilenweise Betrachtung zeigt, dass die berechneten Werte noch eine Abhängigkeit bezüglich der verwendeten Gitterschrittweite aufweisen. Somit erweist sich die unter den erwähnten Einschränkungen bezüglich der Implementierung auf der Basis von MATLAB® in einer 32-Bit-Umgebung erzielbare Auflösung als nicht hinreichend für zuverlässige Aussagen über die Höhe der zu erwartenden Wirbelstromverluste. Dennoch kann eine übereinstimmende Tendenz der Reduktion der Verlustenergie unter Verwendung der beschriebenen Modifikationen im Vergleich zur Ausgangssituation bei einer Betrachtung der einzelnen Spalten abgelesen werden. Die geringsten Verluste sind bei der Verwendung der alternativen Spulengeometrie bei gleichzeitiger Einführung horizontaler Schnitte einer Tiefe von 200 mm zu erwarten. Aus praktischen Gründen, wie der mechanischen Stabilität, erscheint jedoch die Beschränkung auf eine Tiefe von 50 mm mitunter sinnvoller.

Simulationen unter Verwendung der Methode der Finiten Elemente

Zur Absicherung der im vorangegangenen Teil dieses Abschnitts erzielten Ergebnisse werden die Simulationen für die unterschiedlichen Magnetkonfigurationen in Abbildung 4.12 unter Verwendung der Methode der Finiten Elemente wiederholt. Die Approximation des in der Formulierung eingesetzten modifizierten magnetischen Vektorpotentials erfolgt mithilfe vektorieller Ansatzfunktionen mit tangentialer Stetigkeit aus Abschnitt 3.2.2. Auf

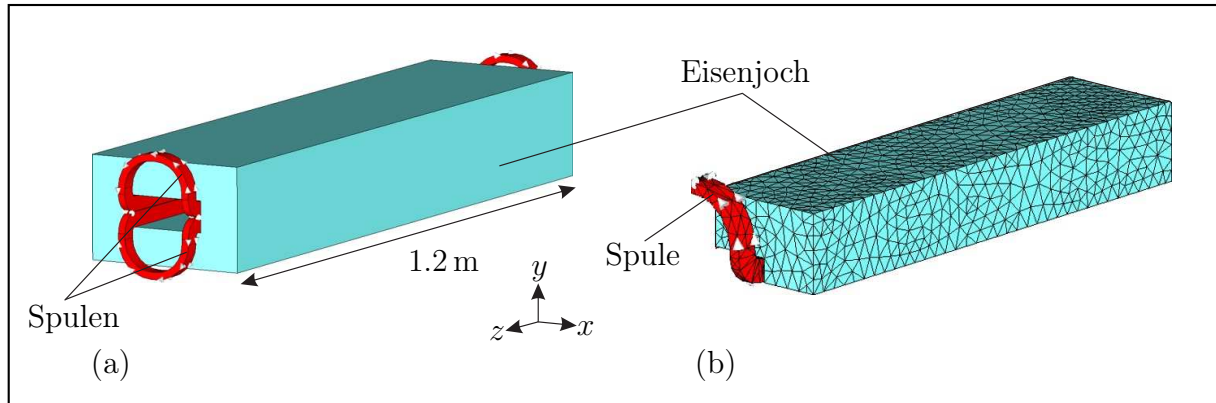


Abbildung 4.16: (a) Aufbau des für die Simulationen verwendeten Magnetmodells; (b) beispielhafte Diskretisierung eines Achtels der Struktur unter Verwendung von Tetraedern.

die Funktionen $\vec{w}_{\xi}^{\text{tv},(0)}$ wird im weiteren unter der Bezeichnung „Ansatzfunktionen nullter Ordnung“ Bezug genommen, da diese in der Lage sind, eine konstante Rotation eines Vektorfeldes exakt abzubilden. Demgegenüber wird für die Funktionen $\vec{w}_{\xi}^{\text{tv},(1)}$ entsprechend der Ausdruck „Ansatzfunktionen erster Ordnung“ benutzt. Hierbei erfolgt eine exakte Darstellung von Vektorfunktionen, deren Rotation eine lineare Variation aufweist. Die letztgenannten Ansatzfunktionen werden im folgenden im Rahmen einer Volumendiskretisierung bestehend aus Tetraedern eingesetzt. Dabei basieren die Simulationen auf der in Gleichung (4.7) gegebenen transienten nichtlinearen Formulierung. Im Gegensatz zu den bereits vorgestellten Simulationen kommt in diesem Fall ein Newton-Verfahren zur Linearisierung der Problemstellung zum Einsatz. Unverändert bleibt hingegen die Homogenisierungsstrategie für das lamellierte Eisenmaterial des Magnetjochs, die wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben, in den nichtlinearen Lösungsprozess eingebunden wird. Nähere Angaben zum Simulationsablauf sowie der verwendeten Implementierung sind der folgenden Aufstellung zu entnehmen, wobei lediglich auf die Unterschiede im Vergleich zu den vorherigen Simulationen ausführlicher eingegangen wird:

- **Vorbereitungen:** Die Modellierung der Magnetanordnung, die Verknüpfung der geometrischen Objekte mit den entsprechenden Materialeigenschaften sowie der Aufbau des unstrukturierten Volumengitters erfolgen in CST EM STUDIO®. Der Aufbau des Magneten ist in Abbildung 4.16(a) dargestellt. Eine vergleichsweise grobe Diskretisierung, welche aus Symmetriegründen lediglich auf einem Achtel der Struktur durchgeführt werden muss, zeigt Abbildung 4.16(b). In diesem Fall erfolgt keine spezielle Gitterverfeinerung in den Endbereichen des Magneten, sondern es wird das automatisch anhand eines globalen Parameters generierte Netz für die Simulationen verwendet.

- *Simulationswerkzeug*: Die Implementierung der benötigten Funktionalität erfolgt innerhalb der Programmiersprache C++ auf einer 64-Bit-Plattform. Damit besteht die bei den vorherigen Simulationen angesprochene Einschränkung bezüglich des zur Verfügung stehenden Adressraums für den Arbeitsspeicher zunächst nicht mehr. Ausgangspunkt für den Aufbau des Simulationswerkzeugs stellt die objektorientierte Finite-Elemente-Bibliothek FEMSTER dar, die auf diskreten Differentialformen basiert und für den Einsatz von Ansatzfunktionen höherer Ordnung ausgelegt ist [152, 65]. Um eine hohe Flexibilität hinsichtlich der Größe der simulierbaren numerischen Modelle sowie eine möglichst kurze Simulationsdauer sicherzustellen, erfolgt eine Parallelisierung der gegebenen Routinen auf der Basis von MPI (engl. „*message passing interface*“) [153]. Dabei wird die Infrastruktur, beispielsweise Matrix- und Vektorformate, hinsichtlich der benötigten Linearen-Algebra-Funktionalität aus der TRILINOS-Bibliothek genutzt [150]. Unter Verwendung der bezeichneten Bibliotheken erfolgt die Implementierung der transienten, nichtlinearen Formulierung in Verbindung mit den vorgestellten Modellierungstechniken. Zur eigentlichen Simulation werden wiederum die Material- und Gitterdaten sowie der Vektor der Stromdichte innerhalb der Spulen aus den von CST EM STUDIO® bereitgestellten Dateien eingelesen.
- *Materialparameter*: Um vergleichbare Werte wie in den vorangegangenen Simulationen zu erhalten, werden dieselben, in der entsprechenden Aufstellung weiter oben aufgeführten Vorgaben zu den Materialeigenschaften sowie der Modellierung des anisotropen Magnetjochs verwendet.
- *Modellierung der Schnitte*: Aufgrund des unstrukturierten Gitters sowie der Abwesenheit einer expliziten Darstellung eines entsprechenden dualen Gitters können die Schnitte nicht wie im Fall der Methode der Finiten Integration eingebracht werden. Stattdessen werden diese als geometrische Objekte in Form von Quadern der Dicke d modelliert. Bezüglich der Reluktivität wird dieselbe Materialmodellierung wie für das lamellierte Joch verwendet, während der Tensor der elektrischen Leitfähigkeit zu $\sigma_{xx} = 3.2 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ bei $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ modifiziert wird. Die Dicke der Schnitte beträgt innerhalb der vorgestellten Simulationen $d = 1 \text{ mm}$, wobei deren Position gegenüber den bisherigen Simulationen unverändert bleibt.
- *Randbedingungen*: Die Rand- und Symmetriebedingungen werden auf dieselbe Art gesetzt wie im Fall der Simulationen unter Verwendung der Methode der Finiten Integration. Im Unterschied dazu beträgt der Abstand des Magnetjochs zu der geschlossenen Randbedingung in x -Richtung nun jedoch ebenfalls 60 mm wie auch in y - und z -Richtung.

- *Numerische Lösung:* Als Residuenschranke im Rahmen des an dieser Stelle zur Linearisierung der Problemstellung eingesetzten Newton-Verfahrens wird ein Wert von $\epsilon_{\text{lin}} = 1 \cdot 10^{-2}$ vorgeschrieben. Im Unterschied zu den vorangegangenen Simulationen wird zur Zeitintegration ein Θ -Verfahren mit $\Theta = 1$ gewählt, wobei die zeitliche Abtastung weiterhin mit einer konstanten Schrittweite von $\Delta t = 10 \text{ ms}$ erfolgt. Der im Rahmen der TRILINOS-Bibliothek vorhandene AMG-Vorkonditionierer ML [149] ist nicht auf die aus der Diskretisierung unter Verwendung interpolatorischer Ansatzfunktionen erster Ordnung entstehenden linearen Gleichungssysteme anwendbar. Daher kommt zur Vorkonditionierung des cg-Verfahrens eine deutlich weniger leistungsfähige SSOR-Methode (engl. „*successive over-relaxation*“) zum Einsatz [100]. In der Folge wird der durch die verbesserten Approximationseigenschaften der Ansatzfunktionen erzielte Vorteil bezüglich der Simulationsdauer teilweise kompensiert. Als Abbruchkriterium für die iterative Lösung der linearen Gleichungssysteme wird eine Schranke von $1 \cdot 10^{-6}$ bezüglich des relativen Residuums verwendet.
- *Nachbearbeitung:* Zur Auswertung der Simulationsergebnisse können die erhaltenen Felddaten wiederum in das CST EM STUDIO[®]-kompatible Format gebracht und dort visualisiert werden. Auch von der Möglichkeit, die resultierenden Daten in MATLAB[®] einzulesen sowie auszuwerten wird Gebrauch gemacht.

Zur Bestimmung der Wirbelstromverluste in den einzelnen Schritten des Zeitintegrationsverfahrens muss Gleichung (4.34) anhand der auf numerischer Basis ermittelten Koeffizienten ausgewertet werden. Analog zu Gleichung (4.37) ergibt sich der Vektor der mit dem elektrischen Feld assoziierten Zustandsgrößen durch eine zeitliche Differentiation des modifizierten magnetischen Vektorpotentials über den zugrunde liegenden Differenzenquotienten. Die Approximation für die elektrische Feldstärke unter Verwendung derselben Ansatzfunktionen wie im Fall des magnetischen Vektorpotentials lautet somit

$$\vec{E} \approx \sum_{\xi} e_{\xi} \vec{w}_{\xi}^{\text{tv}}. \quad (4.38)$$

Bei einer elementweisen Betrachtung des Integrals über die Verlustleistungsdichte und Einsetzen des analytischen Zusammenhangs $\vec{J} = \bar{\sigma} \vec{E}$ folgt

$$P_{\text{v,dis}}^e = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} e_{\alpha} e_{\beta} \int_{V_e^e} \vec{w}_{\alpha}^{\text{tv}} \bar{\sigma} \vec{w}_{\beta}^{\text{tv}} dV. \quad (4.39)$$

für die Verlustleistung $P_{\text{v,dis}}^e$ bezüglich des Tetraeders mit dem Index e . Dabei beschreibt das Integral gerade die Einträge (α, β) der lokale Massenmatrix $\mathbf{M}_{\sigma}^{\text{tv},e}$. In der Folge können die Verluste im gesamten betrachteten Gebiet unter der entsprechenden, von der Zusammenstellung der zugehörigen Matrix bekannten Summation durch

$$P_{\text{v,dis}} = \mathbf{e}^T \mathbf{M}_{\sigma}^{\text{tv}} \mathbf{e} \quad (4.40)$$

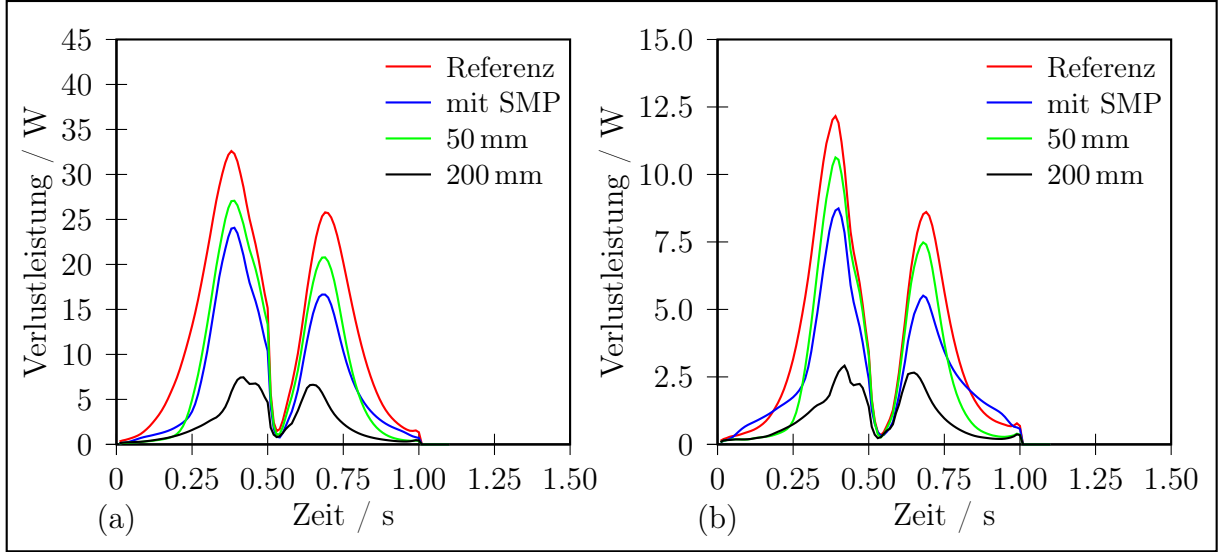


Abbildung 4.17: Zeitlicher Verlauf der Verlustleistung für vier verschiedene Konfigurationen des Magnetjochs gemäß Abbildung 4.12, ausgehend von der Referenzgeometrie mit einem Einsatz aus SMP-Material sowie Schnitten von 50 mm und 200 mm Tiefe. Es wird ein unstrukturiertes Gitter bestehend aus $\pm 40\,000$ Tetraedern in Verbindung mit Ansatzfunktionen erster Ordnung verwendet: (a) Bei Verwendung der herkömmlichen Spule und (b) für die alternative Spulengeometrie mit einer um den Faktor drei gestreckten Ordinatenachse.

bestimmt werden. Dabei enthält der Vektor \mathbf{e} die Koeffizienten e_ξ der Approximation für das elektrische Feld in Gleichung (4.38). Ist hingegen der Wert der Verlustleistung $P_{\text{v,dis}}^\eta$ innerhalb einzelner geometrischer Objekte η gesucht, so kann dieser durch Auswertung der lokalen Verluste gemäß Gleichung (4.39) und anschließende Summation über die zugehörige Untermenge aller Tetraederindizes gefunden werden. Analog zu den Simulationen unter Verwendung der Methode der Finiten Integration ist in Abbildung 4.17(a) der zeitliche Verlauf der Wirbelstromverluste für die in der ersten Zeile von Abbildung 4.12 dargestellten Magnetkonfigurationen, die mit der herkömmlichen Spule ausgerüstet sind, dargestellt. Dabei wird die Verlustleistung in jedem Zeitschritt gemäß Gleichung (4.40) bestimmt. Die Simulationen wurden anhand einer Volumendiskretisierung bestehend aus etwa 40 000 Tetraedern unter Verwendung von Ansatzfunktionen erster Ordnung erzielt. Damit ergibt sich eine Anzahl von Freiheitsgraden zur Approximation des magnetischen Vektorpotentials im Bereich von 220 000 bis 250 000. Die genauen Werte innerhalb der einzelnen Modelle unterscheiden sich aufgrund des verwendeten unstrukturierten Gitters und der daraus resultierenden nicht einheitlichen Gittertopologie. Im Unterschied zu den weiter oben vorgestellten Simulationen erfolgt in diesem Fall keine spezielle Anpassung der Diskretisierung

		Gitter $\pm 40\,000$ Zellen ($\pm 235\,000$ dofs)
herkömmliche Spule	Ausgangskonfiguration	12.51 J
	mit SMP-Einsatz	7.45 J
	mit horizontalen Schnitten (50 mm)	8.62 J
	mit horizontalen Schnitten (200 mm)	2.46 J
alternative Spule	Ausgangskonfiguration	3.82 J
	mit SMP-Einsatz	2.67 J
	mit horizontalen Schnitten (50 mm)	2.86 J
	mit horizontalen Schnitten (200 mm)	0.98 J

Tabelle 4.2: *Gesamte durch induzierte Wirbelströme im Eisenjoch deponierte Energie beim Einsatz einer Diskretisierung bestehend aus $\pm 40\,000$ Tetraedern in Verbindung mit Ansatzfunktionen erster Ordnung für die acht untersuchten Magnetkonfigurationen gemäß Abbildung 4.12.*

an die insbesondere im Endbereich des Magneten zu erwartenden Wirbelstromverluste. Dennoch zeigt sich im Vergleich der beiden unabhängig voneinander erhaltenen Ergebnissen eine gute Übereinstimmung sowohl bezüglich des qualitativen Verlaufs der einzelnen Kurven als auch die Verlustenergie betreffend. Dies gilt, wie in Abbildung 4.17(b) dargestellt, ebenso für die durch den Einsatz der alternativen Spulengeometrie beobachtete Reduktion der z -Komponente der magnetischen Flussdichte im Endbereich des Magneten. Der Verlauf aller an dieser Stelle gezeigten Kurven ist jedoch bedingt durch die höhere Approximationsordnung der verwendeten Ansatzfunktionen wesentlich glatter. Diese Beobachtung ist zum Teil zusätzlich auf die Verwendung des Zeitintegrationsverfahrens mit $\Theta = 1$ im Unterschied zu $\Theta = 2/3$ zurückzuführen, da eventuell auftretende numerische Oszillationen erheblich schneller gedämpft werden. Alle weiteren Erläuterungen zu dem Verlauf der einzelnen Kurven sowie die Auswirkung der verschiedenen Modifikationen auf die Entstehung von Wirbelstromverlusten können somit aufrecht erhalten werden. Für die acht simulierten Variationen des Magnetjochs sowie der Spulenanordnung ist in Tabelle 4.2 wiederum die aus der zeitlichen Integration der Verlustleistung resultierende Energie verzeichnet, welche innerhalb des gesamten Anregungszyklus durch induzierte Wirbelströme in der Magnetanordnung deponiert wird. Ein Vergleich der berechneten Werte für die verschiedenen Konfigurationen bestätigt die auf der Basis der vorherigen Simulationen festgestellte Tendenz. Wiederum führt eine Veränderung der Spule im Sinne der alternativen Geometrie unter Verzicht auf Modifikationen am Magnetjoch bereits zu einer signifikanten Reduktion der Verlustenergie auf etwa ein Drittel des ursprünglichen

Wertes. Eine Verringerung ähnlicher Größenordnung ist unter Beibehaltung der ursprünglichen Spulenkonfiguration bei gleichzeitigem Einbringen horizontaler Schnitte einer Tiefe von 200 mm erreichbar. Diese können sich jedoch in der Praxis als nachteilig im Sinne der mechanischen Stabilität erweisen.

Im direkten Vergleich dieser Ergebnisse mit den in der zweiten Datenspalte von Tabelle 4.1 aufgelisteten Werten, die unter Verwendung der Methode der Finiten Integration bestimmt wurden, zeigen sich jedoch Abweichungen in der berechneten Verlustenergie. Diese sind zum einen in dem in diesem Fall geringer gewählten Abstand zur geschlossenen Randbedingung begründet. Zum anderen ist in den beiden Spalten von Tabelle 4.1 aufgeführten Werten eine Abhängigkeit der berechneten Verlustenergie von der gewählten Gitterauflösung zu beobachten. Diese Tatsache weist auf die, trotz der angewandten Verfeinerung im Endbereich des Magneten, nicht ausreichend feine Diskretisierung hin. Demgegenüber wurde für die Untersuchungen unter Verwendung der Methode der Finiten Elemente nur eine Diskretisierungsstufe gewählt. Da die vorliegende Geometrie, abgesehen von der gekrümmten Spule, bereits mit wenigen Tetraedern exakt abgebildet wird, verspricht der Einsatz der Ansatzfunktionen höherer Ordnung auf der Basis einer vergleichsweise groben räumlichen Auflösung bereits eine hohe Genauigkeit. Daher kann an dieser Stelle auf die Wiederholung aller Simulationen für die verschiedenen Konfigurationen verzichtet werden. Stattdessen erfolgt in Abschnitt 4.3.3 eine Konvergenzstudie bezüglich der Wirbelstromverluste bei unterschiedlichen Diskretisierungsstufen anhand einer ausgewählten Magnet- und Spulengeometrie.

4.3.2 Vergleich der unterschiedlichen Materialmodelle

Um den Einfluss der angewandten Homogenisierungsstrategie auf die Höhe der Wirbelstromverluste sowie den zeitlichen Verlauf der Verlustleistung zu untersuchen, wird eine Simulationsreihe auf der Basis der Referenzgeometrie des Magnetjochs in Verbindung mit der herkömmlichen Spulenanordnung durchgeführt. Dies erfolgt anhand derselben Rahmenbedingungen hinsichtlich der Diskretisierungsstufe und der eingesetzten Ansatzfunktionen wie im vorangegangenen Abschnitt. Für beide in Abschnitt 4.2.2 vorgestellten Formen der Modellierung der Anisotropie werden drei Varianten korrespondierend zu den Werten $\{0.9\bar{3}, 0.96, 0.98\}$ des Packungsfaktors γ_{pk} simuliert. Abbildung 4.18(a) zeigt den resultierenden zeitlichen Verlauf der Verlustleistung während des Anregungszyklus bei der Verwendung des Materialmodells A. Es wird deutlich, dass die Maxima der einzelnen Kurven mit größeren Werten des Packungsfaktors ebenfalls ansteigen. Für das erste Maximum erfolgt ausgehend von 16 W bei $\gamma_{pk} = 0.9\bar{3}$ eine Zunahme auf den annähernd doppelten Wert bei $\gamma_{pk} = 0.98$. Demgegenüber fällt die Veränderung im Wert des zwei-

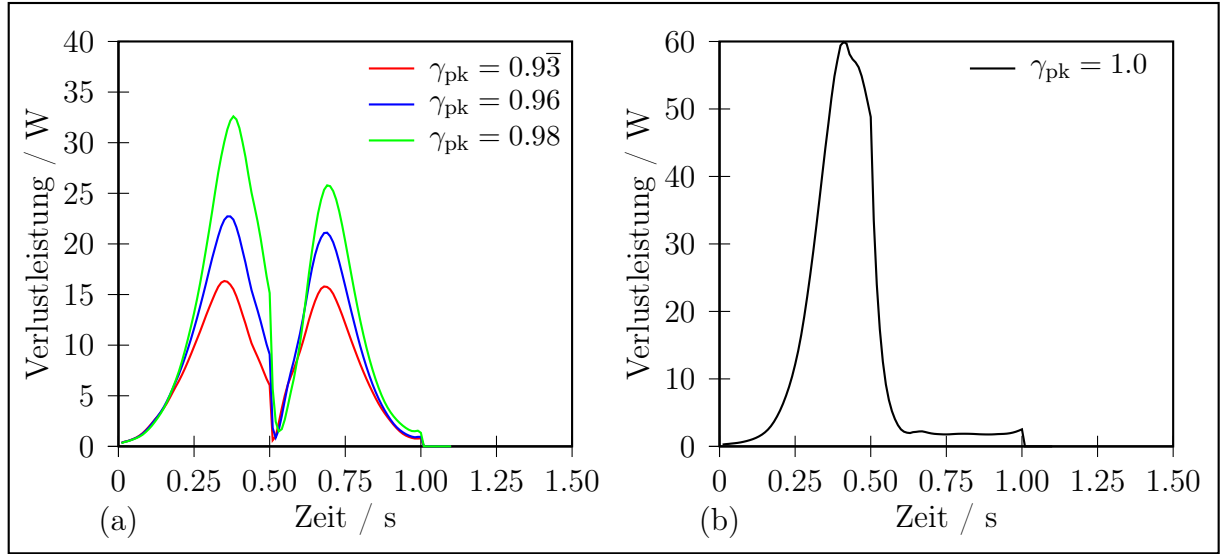


Abbildung 4.18: Zeitlicher Verlauf der Verlustleistung bei der Verwendung des Materialmodells A: (a) Für drei Varianten des Packungsfaktors $\gamma_{pk} < 1$ und (b) für den magnetisch isotropen Fall $\gamma_{pk} = 1$.

ten Maximums nicht derartig groß aus. Dies führt zu einem qualitativ unterschiedlichen Kurvenverlauf bei den betrachteten Werten des Packungsfaktors. Während die beiden Maxima im Fall $\gamma_{pk} = 0.93$ etwa die gleiche Höhe aufweisen, wächst der Unterschied bei zunehmenden Werten von γ_{pk} deutlich an. In dem in Abbildung 4.18(b) dargestellten Extremfall eines bezüglich der magnetischen Eigenschaften isotropen Jochmaterials korrespondierend zu $\gamma_{pk} = 1$ ist das zweite Maximum nicht mehr zu beobachten. Die Ursache dafür liegt im Einfluss des Packungsfaktors auf die Relaxationszeit der Wirbelströme innerhalb des Magnetjochs begründet [125]. Diese kann durch Simulationen unter Verwendung einer Folge der dreiecksförmigen Anregungsprofile in Abbildung 4.11(a) in variablem Abstand bestimmt werden. Im isotropen Fall liegt die Relaxationszeit in der Größenordnung von 5 s, während sie für realistische Werte des Packungsfaktors $\gamma_{pk} < 1$ wesentlich kürzer ausfällt [154]. Diese Effekte werden jedoch an dieser Stelle nicht weiter untersucht. Um den Einfluss der in Materialmodell B enthaltenen Näherung für das anisotrope nichtlineare Materialverhalten zu untersuchen, werden die Simulationen unter Verwendung konstanter, zu denselben Packungsfaktoren gemäß $\mu_{r,z} = 1/(1 - \gamma_{pk})$ korrespondierender Werte für die Permeabilität in z -Richtung wiederholt. Die Ergebnisse für den zeitlichen Verlauf der Verlustleistung zeigt Abbildung 4.19(a). Der qualitative Einfluss des Packungsfaktors, in diesem Fall modelliert durch verschiedene konstante Werte der Permeabilität, auf die Verlustleistung wird korrekt wiedergegeben. Es kann dasselbe Verhalten bezüglich der Veränderung der Maxima bei steigenden Werten von $\mu_{r,z}$ beobachtet werden. In dem in Abbildung 4.19(b) für den jeweils kleinsten und größten Wert dargestellten

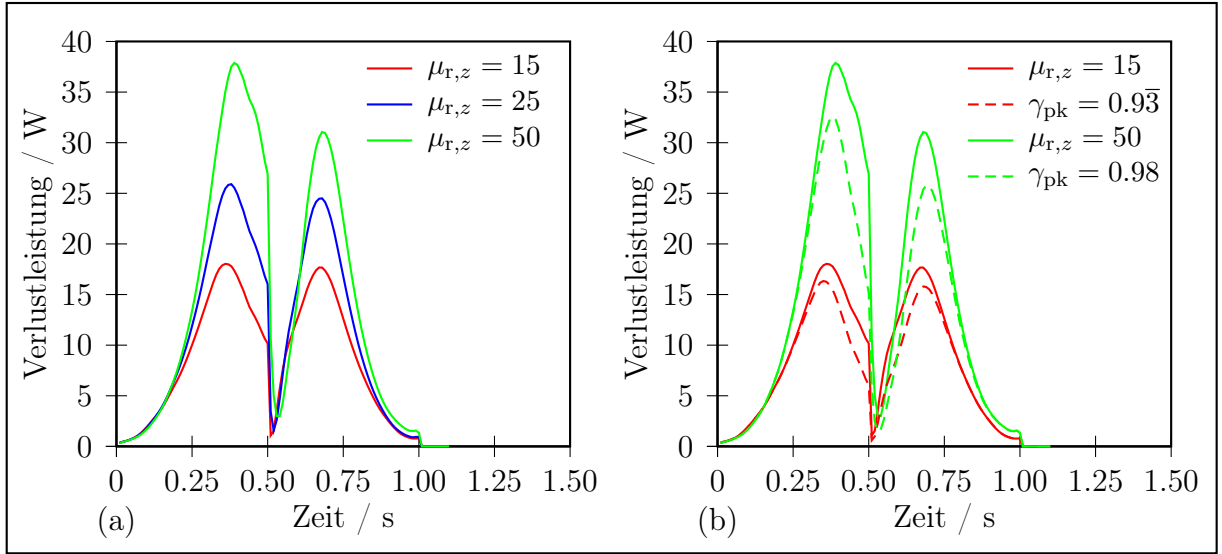


Abbildung 4.19: (a) Zeitlicher Verlauf der Verlustleistung bei der Verwendung von Materialmodell B für verschiedene Packungsfaktoren γ_{pk} . Dabei ergibt sich der bezüglich der z -Koordinate konstante Wert der relativen Permeabilität zur Verwendung im Materialmodell B gemäß $\mu_{r,z} = 1/(1 - \gamma_{pk})$ aus dem Packungsfaktor; (b) Vergleich von Materialmodell A und B anhand der Werte für $\gamma_{pk} = 0.93̄$ und $\gamma_{pk} = 0.98$.

Vergleich werden jedoch Abweichungen sichtbar. Erwartungsgemäß und in Einklang mit Abbildung 4.8(a) kann bei geringeren Packungsfaktoren eine bessere Übereinstimmung beobachtet werden. Es wird jedoch deutlich, dass die bei höherer magnetischer Flussdichte auftretenden Sättigungseffekte im Fall von Materialmodell B nicht korrekt modelliert werden. Ab dem Zeitpunkt $t = 0.3$ s, entsprechend einer magnetischen Flussdichte von $B = 1.2$ T, treten Abweichungen im Kurvenverlauf sowohl bei dem höheren als auch bei dem niedrigeren Wert des Packungsfaktors auf. Dies zeigt, dass die in diesem Modell vernachlässigten Sättigungseffekte in z -Richtung einen Einfluss auf den Verlauf und die Höhe der Verlustleistung ausüben. Insbesondere bei höheren Werten der magnetischen Flussdichte in der Nähe des Zeitpunktes des maximalen Anregungsstroms bei $t = 0.5$ s erfolgt eine Überschätzung des tatsächlichen, zum aktuellen Sättigungsniveau korrespondierenden Wertes der Permeabilität. In der Folge führt dies ebenfalls zu einer Überschätzung der resultierenden Wirbelstromverluste im Magnetjoch. Bei entsprechend geringeren Maximalwerten der magnetischen Flussdichte, die jedoch im Rahmen der betrachteten Anwendung zunächst nicht relevant sind, stellt die getroffene Vereinfachung dennoch eine gute Näherung für das tatsächliche anisotrope Materialverhalten des lamellierten Magnetjochs dar. Zusammenfassend sind die entsprechenden Werte für die Wirbelstromverluste in Tabelle 4.3 aufgeführt. Dabei stellen die in den ersten beiden Datenspalten verzeichneten Werte

Packungsfaktor	Materialmodell A	Materialmodell B	
	Abbildung 4.18(a)	Abbildung 4.19(a)	Literatur [125, 146]
$\gamma_{\text{pk}} = 0.9\bar{3} \leftrightarrow \mu_{\text{r},z} = 15$	7.68 J	8.77 J	8.66 J
$\gamma_{\text{pk}} = 0.96 \leftrightarrow \mu_{\text{r},z} = 25$	9.86 J	11.58 J	11.30 J
$\gamma_{\text{pk}} = 0.98 \leftrightarrow \mu_{\text{r},z} = 50$	12.51 J	15.05 J	13.90 J
$\gamma_{\text{pk}} = 1.0 \leftrightarrow \mu_{\text{r},z} \rightarrow \infty$	13.80 J	-	15.90 J

Tabelle 4.3: Gesamte durch induzierte Wirbelströme im Eisenjoch deponierte Energie bei der Verwendung der Materialmodelle A und B. In der letzten Spalte sind für den Fall von Materialmodell B zum Vergleich Ergebnisse aus der Literatur aufgenommen. Zum Vergleich sind in der letzten Zeile die Ergebnisse für den magnetisch isotropen Fall ($\gamma_{\text{pk}} = 1$) verzeichnet.

die aus der Integration der Verlustleistung in Abbildung 4.18(a) und Abbildung 4.19(a) hervorgehenden Ergebnisse dar. Zu Vergleichszwecken enthält die letzte Spalte die entsprechenden, der Literatur zu entnehmenden Werte für den Fall des Materialmodells B, die unter Verwendung derselben Geometrie sowie identischer Materialkennlinien erzielt wurden [125, 146]. Unter Betrachtung der ersten beiden Datenspalten wird erneut die erwähnte Überschätzung der Permeabilität im Endbereich des Magnetjochs deutlich, welche sich auch in der Verlustenergie in einem erhöhten berechneten Wert niederschlägt. Der Unterschied zwischen den beiden Materialmodellen bezüglich der Wirbelstromverluste wächst von etwa 12% bei $\gamma_{\text{pk}} = 0.9\bar{3}$ auf 17% bei $\gamma_{\text{pk}} = 0.98$ an. Diese Beobachtung deckt sich mit der in Abbildung 4.8(a) verzeichneten theoretischen Vorüberlegung zur Güte der getroffenen Näherung abhängig vom Wert des Packungsfaktors. Bei hoher Packungsdichte ist der Beitrag des ferromagnetischen Materials zur Gesamtrelektivität nicht mehr gegenüber dem der Isolierung vernachlässigbar, so dass mitunter ein größerer Modellierungsfehler entsteht. Der Vergleich zwischen den beiden unter Verwendung des Materialmodells B erzielten Ergebnisse ergibt eine Abweichung unterhalb von 3% für die geringeren Werte des Packungsfaktors. Im Fall $\gamma_{\text{pk}} = 0.98$ liegt der Unterschied hingegen bei etwa 6%. Einen möglichen Grund hierfür stellt der nicht eindeutig spezifizierte Wert der verwendeten konstanten Permeabilität in den beiden hierzu zitierten Quellen dar. Bei identischer Höhe der berechneten Wirbelstromverluste wird einerseits ein Wert von $\mu_{\text{r},z} = 49$ und andererseits von $\mu_{\text{r},z} = 50$ angegeben. Da die berechneten Verluste zusammen mit diesem Wert ebenfalls sinken, ist zu vermuten, dass die größere Abweichung zu den im Rahmen dieser Arbeit mit $\mu_{\text{r},z} = 50$ durchgeführten Simulationen in der Verwendung des geringeren Wertes begründet ist. Auch bei der Betrachtung der letzten Zeile, deren Einträge zu den Ergebnissen einer magnetisch isotropen Modellierung korrespondieren, zeigt sich ein ver-

	# Knoten	# CPUs	# Kerne	Arbeitsspeicher / GiB
Ausbaustufe 1	24	1	1	8
Ausbaustufe 2	36	2	4	16
Ausbaustufe 3	30	2	8	16
Summe	90	156	408	1 248

Tabelle 4.4: *Aufbau und Ausstattung des Multicomputers am Institut für Theorie elektromagnetischer Felder, der im Rahmen der vorgestellten Simulationen für die parallelen Berechnungen eingesetzt wurde.*

gleichsweise großer Unterschied zwischen den Werten der Wirbelstromverluste. Während die in der ersten Datenspalte aufgeführten Werte alle unter Verwendung derselben Diskretisierung erzielt wurden, kommt offensichtlich bei dem in der Literatur verzeichneten Wert von 15.9 J ein weniger feines Gitter zum Einsatz [146]. Diese Tatsache ist eine mögliche Erklärung für die abzulesende Abweichung von etwa 13%. Für die übrigen Werte stellen die verwendete Gitterauflösung sowie die Wahl des Abstands und der Art der eingesetzten Randbedingung die Hauptursachen für die verbleibenden Unterschiede in den berechneten Wirbelstromverlusten dar.

4.3.3 Konvergenzstudie im Hinblick auf die Wirbelstromverluste

Um die Genauigkeit der unter der Verwendung der Methode der Finiten Elemente erzielten Ergebnisse hinsichtlich der Diskretisierung zu untersuchen, werden im folgenden zwei weitere Simulationsreihen am Beispiel der Referenzkonfiguration in Verbindung mit der herkömmlichen Spule durchgeführt. Die bei hoher räumlicher Auflösung sehr zeitaufwendigen transienten Simulationen können dabei durch den Einsatz von Parallelisierungsstrategien effizient auf sogenannten Multicomputern durchgeführt werden. Diese bestehen aus einzelnen Knoten, die über ein schnelles Netzwerk miteinander verbunden sind. Der Aufbau des verwendeten Multicomputers ist in Tabelle 4.4 zusammengefasst. Anzumerken ist, dass nicht bei jeder der vorgestellten Simulationen die gesamten Ressourcen gleichzeitig verwendet wurden und somit ein direkter Vergleich bezüglich der benötigten Rechenzeit nur bedingt möglich ist. Weiterhin wurden einige Berechnungen auf Multiprozessor-Maschinen durchgeführt. Informationen über die Simulationsdauer sind daher stets mit Angaben zu dem im einzelnen Fall eingesetzten System versehen.

Ausgehend von einem sehr groben Gitter werden weitere Diskretisierungen ansteigender Auflösung erzeugt. Diese werden in Verbindung mit Ansatzfunktionen nullter und erster

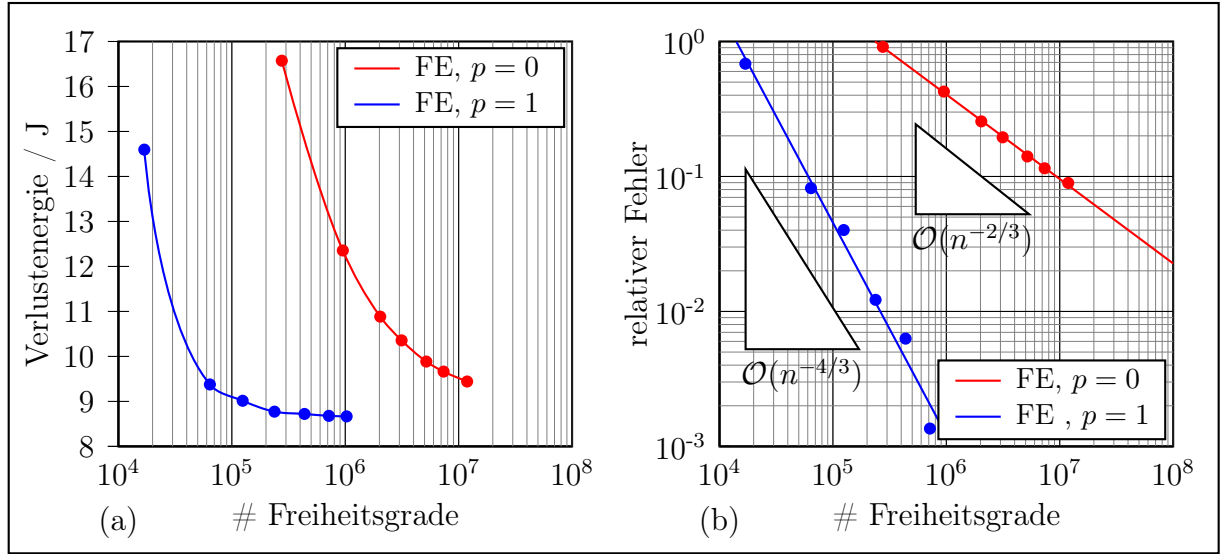


Abbildung 4.20: Vergleich für Ansatzfunktionen verschiedener Approximationsordnung p bei der Verwendung der Methode der Finiten Elemente (FE): (a) Wert der Verlustenergie im Magnetjoch bei verschiedenen Diskretisierungsstufen unter Verwendung von Ansatzfunktionen mit $p = 0$ und $p = 1$ in halblogarithmischer Darstellung. (b) Doppelt-logarithmisch aufgetragener relativer Fehler in der Verlustenergie bezüglich einer Referenzrechnung mit feinem Gitter ($p = 1$) in Form der zugehörigen Datenpunkte und entsprechenden Ausgleichsgeraden nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Ordnung im Rahmen desselben Simulationsszenarios wie in den vorangegangenen Abschnitten eingesetzt. Als Zielgröße für die Bewertung im Rahmen der Untersuchung dient dabei der Wert der Wirbelstromverluste im Magnetjoch. Die unter Verwendung der unterschiedlichen, sukzessiv verfeinerten Volumengitter erzielten Ergebnisse für die Verlustenergie sind in Abbildung 4.20(a) dargestellt. Dabei kommt willkürlich das Materialmodell B mit einem konstanten Wert der relativen Permeabilität von $\mu_{r,z} = 15$ zum Einsatz. Die Konvergenzeigenschaften bezüglich der an dieser Stelle gewählten Zielgröße werden durch den in Abschnitt 4.3.2 beschriebenen Modellierungsfehler nicht beeinträchtigt. Anhand der beiden, in halblogarithmischer Darstellung bezüglich der Abszisse, eingezeichneten Kurven wird deutlich, dass die berechnete induzierte Energie im Magnetjoch stark von der verwendeten Diskretisierung abhängt. Erst bei einer ausreichenden Anzahl an Freiheitsgraden innerhalb der numerischen Simulation können zuverlässige Ergebnisse erwartet werden. Im Fall von Ansatzfunktionen nullter Ordnung werden wesentlich größere numerische Modelle benötigt, um eine Unabhängigkeit der berechneten Lösung von der Gitterschrittweite sicherzustellen. Die entsprechenden Werte der Verlustenergie sind für beide Fälle betrachteter Ansatzfunktionen in Tabelle 4.5 aufgelistet.

nullte Ordnung		erste Ordnung	
# Freiheitsgrade	Verluste / J	# Freiheitsgrade	Verluste / J
275 665	16.57	16 900	14.60
951 607	12.35	64 012	9.38
2 033 471	10.88	124 496	9.01
3 137 650	10.36	237 582	8.77
5 181 676	9.89	437 048	8.72
7 359 792	9.66	716 872	8.68
11 874 521	9.44	1 027 732	8.67

Tabelle 4.5: Werte der berechneten Verlustenergie unter Verwendung verschiedener Diskretisierungen bei einer Approximation mit Ansatzfunktionen nullter und erster Ordnung.

Trotz des vereinfachten Aufbaus des Magneten ist dieses Modell nur eingeschränkt zur Durchführung einer Konvergenzstudie geeignet, da keine analytische Referenzlösung zur Verfügung steht. Um dennoch eine Aussage bezüglich des Fehlerverhaltens unter Einbeziehung des gesamten transienten nichtlinearen Lösungsprozesses treffen zu können, wird als Bezugspunkt der in Tabelle 4.5 in der rechten Spalte aufgeführte, anhand einer Simulation mit etwa einer Million Freiheitsgraden beim Einsatz von Ansatzfunktionen erster Ordnung ermittelte Wert der Wirbelstromverluste herangezogen. Die relative Abweichung der in den einzelnen Fällen berechneten Verlustenergie gegenüber diesem Wert dient zur Definition des relativen Fehlers in Abbildung 4.20(b). Trotz des nicht trivialen Beispiels sowie des komplexen Modellierungs- und Lösungsverfahrens ist die zu erwartende Konvergenzordnung für die beiden Formen verwendeter Ansatzfunktionen abzulesen. Da im Fall der Ansatzfunktionen nullter Ordnung kein vollständig linearer Ansatz in den einzelnen Vektorkomponenten vorliegt, können lediglich konstante Felder exakt abgebildet werden. In der Folge ist eine Verringerung des lokalen Fehlers in der Feldlösung proportional zur inversen Gitterschrittweite zu erwarten. Bei der Betrachtung globaler Größen wie der Verlustleistung in jedem Zeitschritt beziehungsweise der resultierenden Gesamtverluste über den Anregungszyklus liegt die Fehlerordnung zwischen 1 und 2. Analog gilt für den Fall von Ansatzfunktionen erster Ordnung eine Konvergenzrate von 2 bezogen auf den lokalen Fehler der Feldgröße, da lineare Funktionen exakt abgebildet werden. Hinsichtlich der an dieser Stelle gewählten Zielgröße folgt eine zu erwartende Konvergenzrate zwischen 2 und 4. Unter der Annahme eines homogenen Gitters kann näherungsweise von einem kubischen Zusammenhang zwischen der inversen charakteristischen Gitterschrittweite und der Anzahl an Freiheitsgraden ausgegangen werden. Damit ergeben sich maximale Konvergenz-

raten hinsichtlich der Zielgröße von $\mathcal{O}(n^{-2/3})$ beziehungsweise $\mathcal{O}(n^{-4/3})$ für den Fall von Ansatzfunktionen nullter und erster Ordnung, bezogen auf die jeweilige Anzahl an Freiheitsgraden n . Die genannten Werte werden insbesondere im Fall der niedrigsten Ordnung nahezu erreicht, wobei der Verlauf der eingezeichneten Fehlerkurve desweiteren sehr glatt ist. Bei den unter Verwendung von Ansatzfunktionen erster Ordnung simulierten Konfigurationen ist die Anzahl an Freiheitsgraden pro Tetraeder mit 20 gegenüber 6 im Fall nullter Ordnung wesentlich höher. Daher ist die verwendete räumliche Auflösung wesentlich geringer. Dies führt in der Folge zu einem weniger glatten Verlauf der Konvergenzkurve, der sich beim Übergang zu feineren Diskretisierungen jedoch stabilisieren wird. Da bereits unter Verwendung einer vergleichsweise geringen Anzahl an Tetraedern eine deutlich höhere Genauigkeit erreichbar ist, wird auf eine weitere räumliche Verfeinerung an dieser Stelle verzichtet. Anzumerken ist, dass die beobachtete vorteilhafte Konvergenzordnung in Gegenwart von Objekten, deren Oberfläche nicht durch planare Flächen exakt beschreibbar ist, nicht den Maximalwert von 4 annehmen wird. Um diese Situation wiederherzustellen muss zu isoparametrischen Elementen höherer geometrischer Ordnung übergegangen werden. In Verbindung mit dem vorliegenden Modell ist der Einsatz der Ansatzfunktionen erster Ordnung jedoch sehr effizient. So sind zum Erreichen eines Genauigkeitsniveaus von 10% bereits weniger als 100 000 Freiheitsgrade ausreichend, während im Fall nullter Ordnung mit zehn Millionen annähernd die 100-fache Anzahl erforderlich ist. Aus einer Extrapolation der Konvergenzkurve korrespondierend zur Anwendung von Ansatzfunktionen nullter Ordnung folgt, dass zum Erreichen einer Fehlerschranke von 1% bis zu eine Milliarde Freiheitsgrade benötigt würden. Mit dem beschriebenen Simulationsverfahren sowie der vorliegenden Implementierung ist trotz des Einsatzes von Parallelisierungsstrategien eine dementsprechende Modellgröße derzeit hinsichtlich Rechen- und Speicherkapazität nicht erreichbar. Durch den Einsatz von Ansatzfunktionen höherer Ordnung kann jedoch, insbesondere bei dem vorliegenden Beispiel des Beschleunigermagneten, eine wesentlich effizientere Simulation bei höherer Genauigkeit erfolgen. Als ein anwendungsbezogenes Maß unter Berücksichtigung aller beteiligter Effekte kann die *Simulationsgeschwindigkeit* gemäß

$$\eta = K_s \frac{1}{\epsilon_{\text{err}} t_{\text{sim}}} \quad (4.41)$$

unter Verwendung des relativen Fehlers ϵ_{err} und der gesamten Simulationsdauer t_{sim} in Sekunden definiert werden. Der Skalierungsfaktor K_s dient dabei lediglich der Erzeugung übersichtlicher Zahlenwerte und wird im folgenden zu $K_s = 36\,000$ gewählt. In die so definierte Größe geht nur die reine Simulationsdauer, jedoch nicht die Aufwendung von Hardwareressourcen ein. Eine entsprechende Berücksichtigung enthält die *relative Simu-*

# Freiheitsgrade	Ordnung	ϵ_{err}	$t_{\text{sim}} / \text{h}$	# Prozesse	η	η_{rel}
16 900	1	0.684	1.8	8	8.2	1.02
124 496	1	0.040	9.8	8	25.4	3.18
187 442	1	0.019	15.1	8	34.6	4.32
716 872	1	0.001	7.3	72	1 017.7	14.13
275 665	0	0.912	1.5	8	7.5	0.93
2 033 471	0	0.256	1.3	72	31.3	0.43
3 137 650	0	0.195	2.0	132	25.9	0.20
5 181 676	0	0.141	2.2	132	32.1	0.24
11 874 521	0	0.089	4.4	132	25.6	0.19

Tabelle 4.6: Aufstellung über die Simulationsgeschwindigkeit ausgewählter, in Rahmen der Konvergenzuntersuchung durchgeführter, Simulationen unter Verwendung von Ansatzfunktionen nullter und erster Ordnung.

lationsgeschwindigkeit, die gemäß

$$\eta_{\text{rel}} = \frac{\eta}{n_{\text{proc}}} = K_s \frac{1}{\epsilon_{\text{err}} t_{\text{sim}} n_{\text{proc}}} \quad (4.42)$$

aus der Simulationsgeschwindigkeit η und der Anzahl verwendeter Prozesse n_{proc} hervorgeht. In Tabelle 4.6 sind einige der im Rahmen der Konvergenzuntersuchung durchgeführten Simulationen hinsichtlich der beiden definierten Größen aufgelistet. Die Werte der Simulationsgeschwindigkeit für Ansatzfunktionen erster Ordnung auf acht Prozessen, abgesehen von dem ersten aufgeführten Eintrag, und für Ansatzfunktionen nullter Ordnung liegen in derselben Größenordnung von etwa 30 s^{-1} . Wird hingegen der notwendige Aufwand an Hardwareressourcen in Form beteiligter Prozesse eingerechnet, so ergibt sich ein deutlicher Unterschied zugunsten der Simulationen unter Verwendung der Ansatzfunktionen höherer Ordnung. Da bereits mit acht beteiligten Prozessen eine vergleichsweise hohe Genauigkeit erreicht werden kann, liegt die relative Simulationsgeschwindigkeit η_{rel} in diesem Fall wesentlich höher. Werden auch bei diesen Simulationen die Vorteile der Parallelisierung auf Multicomputern, hier durch die Verwendung von 72 Prozessen, ausgenutzt, steigen die beschriebenen Maßzahlen auf Werte an, die beim Einsatz von Ansatzfunktionen niedrigster Ordnung nicht erreicht werden können. Dies liegt insbesondere an der aus Abbildung 4.20(b) ersichtlichen hohen Genauigkeit, die bedingt durch die erhöhte Konvergenzrate erzielt wird. Zu erwähnen ist, dass die Simulationen bei der Verwendung von Ansatzfunktionen nullter Ordnung trotz einer hohen Zahl an Freiheitsgraden dank der effizienten Vorkonditionierung mit einem algebraischen Mehrgitterverfahren sehr schnell ablaufen. Allerdings kann dieser Vorteil aufgrund der begrenzten Verfügbarkeit von Spei-

cher und Rechenleistung zunächst nicht beliebig für eine weitaus höhere Zahl an Freiheitsgraden skaliert werden. Daher stellen Ansatzfunktionen höherer Ordnung für die in diesem Kapitel beschriebenen Simulationen die bessere Wahl dar. Nur unter Ausnutzung der damit verbundenen höheren Konvergenzordnung kann eine ausreichende Genauigkeit erzielt werden.

Die in Abschnitt 4.3.1 vorgestellten Ergebnisse der Finite-Elemente-Simulationen für die unterschiedlichen Konfigurationen von Magnetjoch und Spulengeometrie wurden unter Verwendung von etwa 235 000 Freiheitsgraden erzielt. Daher liegt, unter Betrachtung von Abbildung 4.20(b), die zu erwartende Genauigkeit in der Größenordnung von 1%.

4.3.4 Bestimmung der Wirbelstromverluste im Strahlrohr

Das Strahlrohr innerhalb des Öffnungsbereiches des SIS-100-Magneten wird über die in Abschnitt 4.2.3 dargestellte Methode modelliert. Die hier vorgestellten Simulationen erfolgen auf der Basis des bereits zur Wirbelstromberechnung mit der Methode der Finiten Integration in Abschnitt 4.3.1 beschriebenen Simulationswerkzeugs in einer MATLAB®-Umgebung. Damit gelten erneut die an der betreffenden Stelle beschriebenen Einschränkungen bezüglich der erzielbaren Modellgröße. Im Unterschied dazu kommt jedoch im folgenden die Methode der Finiten Elemente für die räumliche Diskretisierung zum Einsatz. Da das Simulationswerkzeug den Richtlinien der objektorientierten Programmierung folgt, können, nach dem Hinzufügen einer Klasse, welche ein dreidimensionales Finite-Elemente-Modell implementiert, die weiteren erforderlichen Programmkomponenten wie das Zeitintegrations- sowie das nichtlineare Lösungsverfahren komfortabel weiterverwendet werden. Die folgende Aufstellung beschreibt ergänzend zur entsprechenden Stelle in Abschnitt 4.3.1 die Simulationsparameter sowie einzelne Aspekte der hier zugrundeliegenden Implementierung:

- *Vorbereitungen:* Die zu simulierende Struktur wird in CST EM STUDIO® modelliert und einer Volumendiskretisierung mit Tetraedern unterzogen. Dabei wird das unter Verwendung der in Abschnitt 4.2.3 beschriebenen Methode zu diskretisierende Strahlrohr lediglich durch seine Oberfläche charakterisiert. Auf der Basis dieses Dreiecksgitters erfolgt die Bestimmung der räumlichen Verteilung der Wirbelströme im elektrisch leitfähigen Strahlrohr.
- *Simulationswerkzeug:* Zur Bestimmung der Wirbelströme in dünnen leitfähigen Objekten wird das entsprechend modifizierte Simulationswerkzeug auf MATLAB®-Basis eingesetzt. Die hinzugefügte Klasse implementiert eine Finite-Elemente-Diskretisierung mit tangential stetigen vektoriellen Ansatzfunktionen nullter Ordnung.

- *Materialparameter:* Zur Modellierung des nichtlinearen Materials des Magnetjochs kommt dieselbe charakteristische Kennlinie wie zuvor zum Einsatz. Die Homogenisierung erfolgt willkürlich unter Verwendung von Materialmodell B mit einer konstanten relativen Permeabilität $\mu_{r,z} = 15$ korrespondierend zu einem Packungsfaktor $\gamma_{pk} = 0.9\bar{3}$. Für die Leitfähigkeit des lamellierten Magnetjochs wird wiederum der anisotrope Diagonaltensor $\bar{\sigma}$ mit $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 3.2 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ bei $\sigma_{zz} = 0$ angesetzt. Demgegenüber wird eine isotrope Leitfähigkeit von $2 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ für das dünnwandige Strahlrohr verwendet.
- *Randbedingungen:* Die Rand- und Symmetriebedingungen sind unverändert gegenüber den in Abschnitt 4.3.1 vorgestellten Simulationen.
- *Numerische Lösung:* Als Zeitintegrationsverfahren kommt die Θ -Methode mit $\Theta = 1$ in Verbindung mit einem konstanten Zeitschritt $\Delta t = 10 \text{ ms}$ zum Einsatz. Die Linearisierung erfolgt mithilfe des Verfahrens der sukzessiven Substitution bei einem Abbruchkriterium von $\epsilon_{\text{lin}} = 1 \cdot 10^{-3}$. Zur Lösung der entstehenden linearen Gleichungssysteme wird wie zuvor das algebraische Mehrgitterverfahren aus der TRILINOS-Bibliothek zur Vorkonditionierung im Rahmen eines cg-Verfahrens eingesetzt [150]. Dabei gelten dieselben Bedingungen zur Anwendbarkeit bezüglich nicht leitfähiger Untergebiete. Weiterhin werden die Simulationen auf einer 32-Bit-Plattform mit den daraus resultierenden Einschränkungen bezüglich der erreichbaren Modellgröße durchgeführt.
- *Nachbearbeitung:* Die Bestimmung der Wirbelstromverluste erfolgt unmittelbar in MATLAB[®], wobei grundsätzlich auch die Möglichkeit besteht, eine Visualisierung der berechneten Felddaten im Rahmen von CST EM STUDIO[®] durchzuführen.

Bevor jedoch die in Abschnitt 4.2.3 beschriebene Methode zur Modellierung des Strahlrohrs eingesetzt wird, erfolgt zunächst eine Validierung anhand eines einfachen Beispiels mit bekannter analytischer Lösung. Dazu wird die in Abbildung 4.21(a) dargestellte leitfähige Scheibe mit einer Dicke $\delta \ll r$ einer zeitlich veränderlichen magnetischen Flussdichte ausgesetzt. Die Anregung erfolgt in Form einer sinusförmigen Schwingung der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$ gemäß Abbildung 4.21(b). Der Radius der Scheibe beträgt im vorliegenden Beispiel $r = 0.2 \text{ m}$, während in dieser Simulationsreihe deren Dicke δ im Bereich zwischen 1 mm und 0.001 mm in mehreren Stufen variiert wird. Als Vergleichsgröße dient die mittlere, durch Wirbelströme in der leitfähigen Scheibe induzierte Leistung über eine Schwindungsperiode der Dauer 20 ms . Wenngleich bei dem gegebenen Anregungssignal die Möglichkeit zu einer Lösung des Feldproblems im Frequenzbereich (engl. „frequency domain“, FD) besteht, erfolgen die Simulationen im Zeitbereich (engl. „time domain“, TD) um auch diesen Teil des Simulationswerkzeuges in die Validierung einzubeziehen. Der Ver-

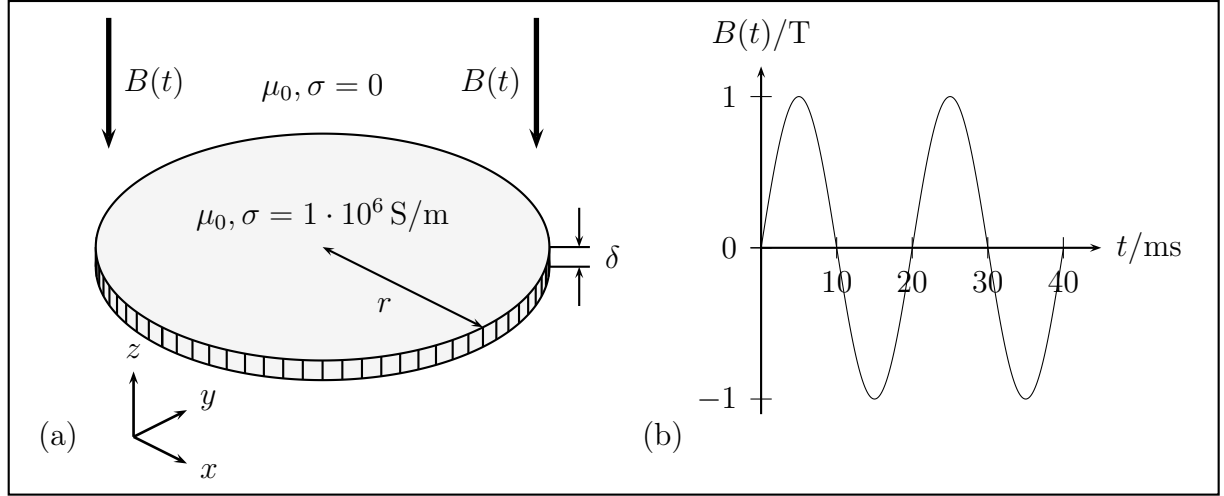


Abbildung 4.21: (a) Dünne leitfähige Scheibe in homogenem Magnetfeld. (b) Zeitlicher Verlauf der von außen aufgeprägten magnetischen Flussdichte.

gleich wird jedoch gegenüber einer analytischen Lösung im Frequenzbereich durchgeführt. Für das betrachtete Beispiel ergibt sich diese unter den zulässigen Vereinfachungen bezüglich der räumlichen Variation der Feld- und Flussgrößen sowie der im Vergleich zum Radius geringen Dicke der Scheibe aus der Lösung eines eindimensionalen Problems zu

$$P_v^{\text{FD}} = \frac{1}{2} \sigma \delta \pi^3 f^2 |\underline{B}_z|^2 r^4. \quad (4.43)$$

Dabei bezeichnet \underline{B}_z die komplexe Amplitude der eingeprägten magnetischen Flussdichte in z -Richtung [155]. Aus der Simulation im Zeitbereich mit einer konstanten Schrittweite von $\Delta t = 1 \text{ ms}$ wird die mittlere Leistung über eine Periode T der Sinusschwingung gemäß

$$P_v^{\text{TD}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (4.44)$$

aus der Verlustleistung $p(t)$ an den diskreten Zeitpunkten bestimmt. In Tabelle 4.7 ist der aus dem Vergleich von P_v^{FD} mit P_v^{TD} resultierende relative Fehler in der mittleren Verlustleistung für verschiedene Schichtdicken δ aufgeführt. Die verbleibenden Unterschiede zur analytischen Lösung sind dem räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsfehler zuzuordnen. Zu beobachten ist, dass die Anzahl zur Lösung des Gleichungssystems notwendiger Iterationen innerhalb des cg-Verfahrens bei der Verwendung der Modellierung für dünne Schichten unabhängig von der Dicke δ ist. Dies ist zu erwarten, da das zugrundeliegende Gitter innerhalb dieser Simulationsreihe identisch bleibt und lediglich eine lokale Modifikation der Einträge der Massenmatrix erfolgt, die sich bei den verwendeten Parametern noch nicht negativ auf die Konditionszahl auswirkt. Damit bleibt im Fall des cg-Verfahrens auch die Iterationszahl zum Erreichen einer vorgegebenen Genauigkeitsschranke konstant.

Schichtdicke δ / mm	relativer Fehler / %	# cg-Iterationen mit Schichtmodell	# cg-Iterationen ohne Schichtmodell
1.0	1.22	14	39
0.1	1.14	14	86
0.01	1.12	14	132
0.001	0.93	14	∞

Tabelle 4.7: *Relativer Fehler gegenüber analytischer Lösung bei variierender Schichtdicke δ . Benötigte Anzahl an Schritten bei der iterativen Lösung der Gleichungssysteme innerhalb des Zeitschrittverfahrens unter Verwendung der Modellierung für dünne Schichten und bei Auflösung der Schicht durch ein Volumengitter.*

In der letzten Spalte sind zum Vergleich die bei einer vollständigen räumlichen Auflösung der dünnen Schicht im Volumengitter erforderlichen Iterationszahlen korrespondierend zu demselben Genauigkeitsniveau angegeben. Der notwendige numerische Aufwand, gemessen über die Anzahl an Iterationsschritten bei der Lösung der Gleichungssysteme, ist in diesem Fall wesentlich höher. Bei reduzierter Schichtdicke steigt zusätzlich aufgrund der ungünstigen Längenverhältnisse innerhalb der Tetraeder die Konditionszahl und in der Folge die Anzahl an Iterationsschritten an. Für den Fall $\delta = 0.001$ mm kann die vorgegebene Residuenschranke nicht mehr erreicht werden.

In einer weiteren Simulationsreihe wird dasselbe Verfahren zur Bestimmung der Wirbelstromverluste im elliptischen Strahlrohr innerhalb des beschriebenen Modells des SIS-100-Magneten angewandt. Bisher wurde stets einer der entlang des gesamten Umfangs des geplanten Beschleunigerrings angeordneten Magneten separat betrachtet. Dies ist zulässig, da der Abstand ausreichend groß ist, um von einer vernachlässigbaren Wechselwirkung zwischen benachbarten Magneten ausgehen zu können. Das Strahlrohr ist jedoch über den Ring geschlossen und verläuft durch alle beteiligten Magneten. Um dennoch eine isolierte Simulation durchführen zu können, müssen entsprechende Annahmen zu dem Verlauf der im Strahlrohr induzierten Wirbelströme über den gesamten Ring getroffen werden. Die Wahl der Modellierung und auch der praktischen Ausführung in dieser Hinsicht hat einen Einfluss auf die Höhe der zu erwartenden Wirbelstromverluste [156]. Die dort für eine Modellierung im Rahmen einer zweidimensionalen Approximation beschriebenen Anwendungsszenarien lassen sich auch auf den an dieser Stelle relevanten dreidimensionalen Fall übertragen. Es kann somit zwischen den folgenden Modellierungsmöglichkeiten unterschieden werden:

1. Die Segmente des Strahlrohrs innerhalb der einzelnen Magnete sind elektrisch leitend verbunden. Induzierte Wirbelströme können den Übergang zwischen benachbarten

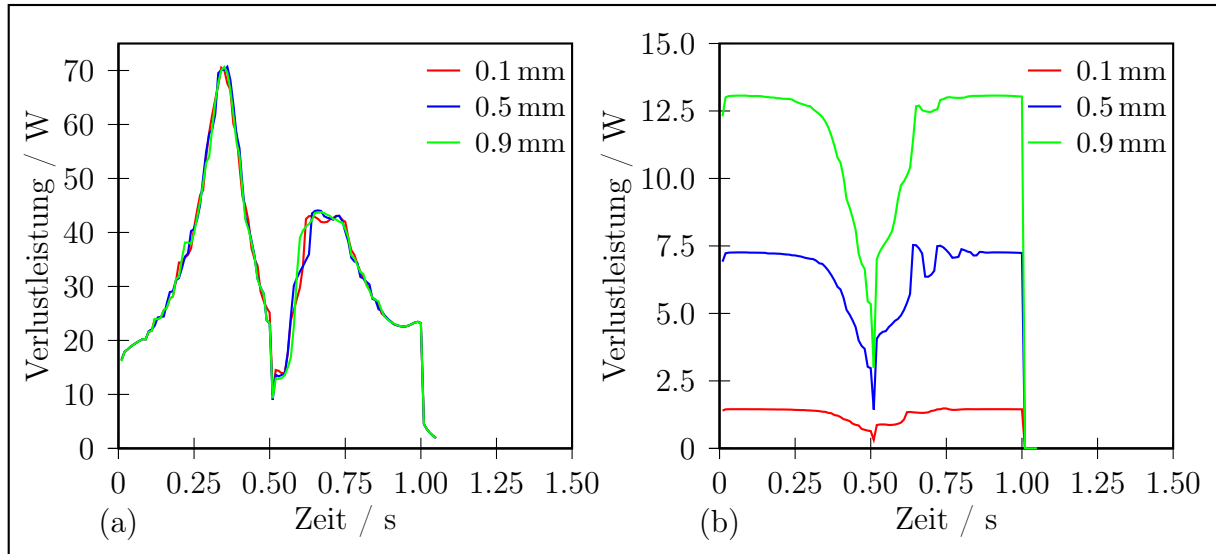


Abbildung 4.22: Zeitlicher Verlauf der Verlustleistung für unterschiedliche Werte δ im Bereich von 0.1 mm bis 0.9 mm der Dicke des Strahlrohrs bei einer Diskretisierung mit $\pm 50\,000$ Freiheitsgraden: (a) Im Magnetjoch in Verbindung mit Materialmodell B und einer konstanten relativen Permeabilität $\mu_{r,z} = 15$. (b) Im elliptischen Strahlrohr unter Verwendung der Modellierung als dünne Schicht.

Magneten passieren. Dies wird durch eine homogene Dirichlet-Randbedingung innerhalb des numerischen Modells erreicht.

2. Im Fall eines erhöhten Übergangswiderstands zwischen den zu benachbarten Magneten gehörigen Strahlrohrsegmenten kann der resultierende endliche Widerstand des gesamten Strahlrohrs durch eine inhomogene Neumann-Randbedingung in das Modell eingebracht werden.
3. Den Gegensatz zu Variante 1 stellt die Einprägung einer homogenen Neumann-Randbedingung für das Strahlrohr an der Begrenzung des betrachteten Volumens dar. Dadurch wird erzwungen, dass keine Wirbelströme über das Strahlrohr zwischen benachbarten Magneten fließen. Dies kommt einer, in der Praxis nicht gewünschten, galvanischen Trennung der Strahlrohrsegmente gleich.

Für die im folgenden vorgestellten Simulationen wird Variante 1 eingesetzt, um eine Abschätzung der oberen Grenze der zu erwartenden Verluste zu erhalten. Abbildung 4.22(a) zeigt die Ergebnisse für die berechneten Wirbelstromverluste im Magnetjoch. Diese unterscheiden sich für verschiedene Schichtdicken lediglich im Rahmen der jeweils vorgegebenen Residuentoleranz innerhalb des nichtlinearen Lösungsverfahrens. Der Kurvenverlauf zeigt das bereits in Abschnitt 4.3.2 für das Materialmodell B beobachtete Verhalten. Dem-

Schichtdicke δ / mm	Verluste Strahlrohr / J	Verluste Magnetjoch / J	relative Gesamt- verluste / J/m
0.1	1.30	33.94	29.36
0.3	3.89	33.94	31.52
0.5	6.48	33.95	33.69
0.7	9.07	33.92	35.83
0.9	11.65	33.88	37.95

Tabelle 4.8: *Wirbelstromverluste innerhalb des Magneten bei unterschiedlicher Dicke des leitfähigen Strahlrohrs für die einzelnen betrachteten Komponenten.*

gegenüber ist in Abbildung 4.22(b) die separat ausgewertete Verlustleistung innerhalb des dünnen leitfähigen Strahlrohrs aufgetragen. Da in linearen Materialien die induzierte elektrische Feldstärke proportional zur Änderungsrate der magnetischen Flussdichte ist, verlaufen die Kurven auf der ansteigenden beziehungsweise abfallenden Flanke des verwendeten dreiecksförmigen Anregungssignals konstant. Bei beginnender Sättigung des ferromagnetischen Eisenjochs verlangsamt sich die Änderungsrate der magnetischen Flussdichte geringfügig. In der Folge sinkt auch die induzierte Verlustleistung in der Nähe des maximalen Anregungsstroms bei $t = 0.5$ s. In Tabelle 4.8 sind die entsprechenden, durch zeitliche Integration erhaltenen Werte der Wirbelstromverluste bei unterschiedlicher Dicke des Strahlrohrs verzeichnet. Die letzte Spalte enthält zusätzlich den Wert der gesamten in diesem Modell auftretenden Wirbelstromverluste bezogen auf die Länge des Magnetjochs. Anhand der zweiten Spalte ist der annähernd lineare Zusammenhang zwischen der Dicke des Strahlrohrs und der Höhe der resultierenden Verluste in diesem Modellteil erkennbar. Erwartungsgemäß ist der Wert der ausschließlich im Magnetjoch auftretenden Verluste weitgehend unabhängig von der Präsenz und Ausführung des Strahlrohrs.

Wie bereits in Abschnitt 4.3.3 dargestellt, hängt die Höhe der berechneten Wirbelstromverluste im Magnetjoch deutlich von der verwendeten Gitterauflösung ab, insbesondere in Abwesenheit einer speziellen Verfeinerung in den Endbereichen des Magneten. Beim Vergleich der in der dritten Spalte von Tabelle 4.8 aufgeführten Ergebnisse mit dem in Tabelle 4.5 verzeichneten Wert bei einer Diskretisierung mit 300 000 Freiheitsgraden nullter Ordnung zeigt sich bereits eine Abweichung von 100%. Selbst diese räumliche Auflösung ist aufgrund der Beschränkung der vorliegenden Implementierung auf eine 32-Bit-Plattform an dieser Stelle nicht erreichbar. Die Größenordnung der berechneten Verluste liegt jedoch in dem nach Abbildung 4.20(b) auf der Basis einer Extrapolation in Richtung einer geringeren Anzahl an Freiheitsgraden zu erwartenden Bereich. Der resultierende relative Fehler ist dementsprechend groß. In Tabelle 4.9 sind die Werte der Wirbelstromverluste bei der

Anzahl Freiheitsgrade	Verluste Strahlrohr / J	Verluste Magnetjoch / J	relative Gesamt- verluste / J/m
50 000	3.89	33.94	31.52
90 000	3.93	28.41	26.95

Tabelle 4.9: Vergleich der Werte der Wirbelstromverluste im Magnetjoch sowie im Strahlrohr bei einer Schichtdicke $\delta = 0.3 \text{ mm}$ für verschiedene Diskretisierungsstufen in Verbindung mit Ansatzfunktionen nullter Ordnung.

Verwendung einer höheren, jedoch dennoch nicht ausreichenden Diskretisierungsstufe in Verbindung mit einer Schichtdicke von $\delta = 0.3 \text{ mm}$ aufgeführt. Während die berechneten Verluste im Strahlrohr nur eine geringe Veränderung zeigen, sinkt die Verlustleistung im Magnetjoch analog zu der in Abschnitt 4.3.3 durchgeführten Konvergenzuntersuchung deutlich ab. Somit bleibt festzuhalten, dass mit der beschriebenen Modellierung des Strahlrohrs eine gute Abschätzung der in diesem Modellteil entstehenden Wirbelstromverluste gefunden werden kann. Zur Bestimmung zuverlässiger Werte ist jedoch der Wechsel auf eine 64-Bit-Plattform zur Überwindung der Problematik des begrenzten Arbeitsspeichers erforderlich. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Implementierung der spezifischen Modellierung des Strahlrohrs innerhalb des ebenfalls vorgestellten parallelisierten Simulationswerkzeuges. Das beschriebene Vorgehen kann unmittelbar auf den Einsatz innerhalb einer Finite-Elemente-Diskretisierung höherer Ordnung durch die Wahl entsprechender Ansatzfunktionen auf der Triangulierung der Oberfläche verallgemeinert werden.

4.4 Untersuchung der magnetischen Flussdichte im Öffnungsbereich

Als zweite Hauptanforderung an die zum Einsatz im Synchrotron SIS-100 vorgesehenen Dipolmagnete gilt die Einhaltung eines strengen Grenzwertes bezüglich der von dem homogenen Dipolfeld im Öffnungsbereich abweichenden Anteile der magnetischen Flussdichte. Deren relativer Anteil sollte einen Wert von $6 \cdot 10^{-4}$ nicht übersteigen. Neben den geometriebedingten Fehlern, die auch im Inneren des Magneten auftreten, spielen auch dreidimensionale Effekte, die in den Endbereichen durch die Krümmung der Spule sowie induzierte Wirbelströme entstehen, eine Rolle. Zur Untersuchung der Eigenschaften der magnetischen Flussdichte im Öffnungsbereich des Magneten wird im folgenden der in Abbildung 4.23(a) dargestellte Aufbau verwendet. Gegenüber der in Abschnitt 4.3 betrachteten Referenzgeometrie in Verbindung mit der herkömmlichen Spulenordnung ist

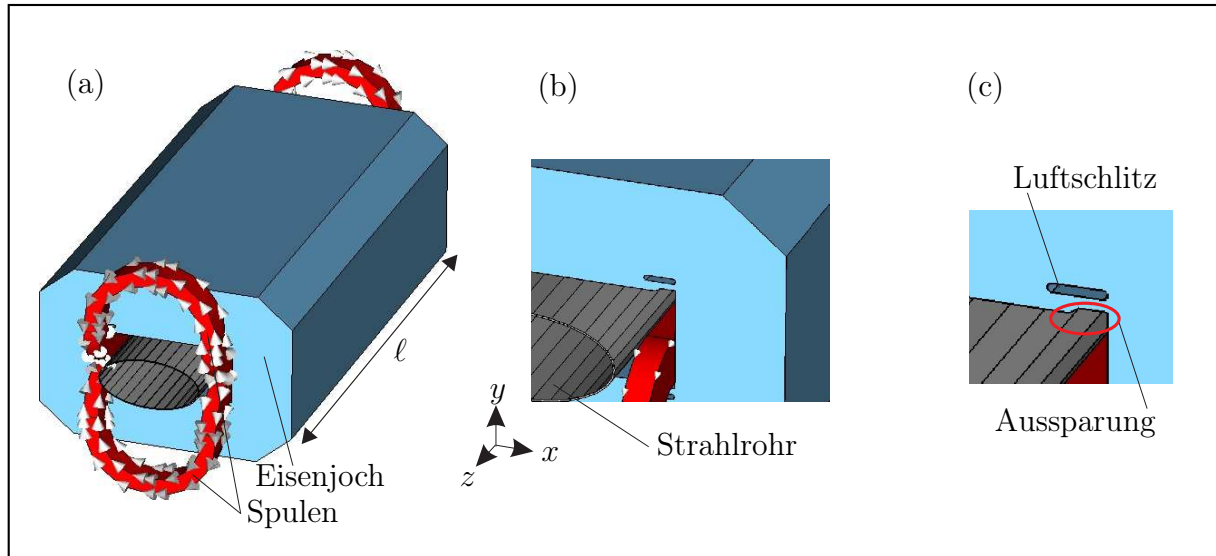


Abbildung 4.23: (a) Zur Untersuchung der Homogenität der magnetischen Flussdichte eingesetztes, auf $\ell = 0.5\text{ m}$ verkürztes Modell des SIS-100-Magneten; (b) metallisches Strahlrohr im Öffnungsbereich; (c) Modifikationen der Jochgeometrie mit dem Ziel der Verbesserung der Feldqualität.

insbesondere die Länge ℓ des Magneten von 1.2 m auf 0.5 m verkürzt. Dies dient der Reduktion des Aufwands bei der numerischen Berechnung und führt zu einer Überbetonung der am Rand auftretenden Störungen bezogen auf die Länge des Magneten. Qualitativ treten jedoch an dem verkürzten Modell dieselben Effekte auf wie an einem Magneten voller Länge. Weiterhin ist das Magnetjoch im Querschnitt an den vier Ecken abgeflacht. Abbildung 4.23(b) zeigt das im Öffnungsbereich eingebrachte, aus Edelstahl gefertigte elliptische Strahlrohr in einer vergrößerten Darstellung. Im Rahmen der im folgenden vorgestellten statischen Simulationen wird es jedoch aufgrund seiner magnetischen Eigenschaften ($\mu_r \approx 1$) zunächst nicht berücksichtigt. Bei zeitabhängiger Änderung der magnetischen Flussdichte im Rahmen des Beschleunigungszyklus wird das Strahlrohr auf der Basis der elektrischen Leitfähigkeit $\sigma = 2 \cdot 10^6\text{ S/m}$ in die Simulationen einbezogen. Dabei erfolgt die Modellierung in diesem Fall nicht unter Verwendung von Oberflächenelementen. Vielmehr wird das Strahlrohr mit einer Dicke von 1 mm innerhalb der Volumendiskretisierung berücksichtigt. Dies führt zu der in Abschnitt 4.3.4 beschriebenen negativen Auswirkung auf die numerischen Eigenschaften der zu lösenden Gleichungssysteme, welche an dieser Stelle jedoch in Kauf genommen werden. Bei der Verwendung des für die Dicke vorgesehenen Wertes von 0.3 mm muss jedoch auf Oberflächenelemente zurückgegriffen werden, insbesondere im Fall der vollen Magnetlänge von 3.002 m . Desweiteren werden in den folgenden Simulationen die zur Verbesserung der Feldqualität vorgeschlagenen Modifikationen am Magnetjoch in Abbildung 4.23(c) berücksichtigt. Durch den in das Eisen eingebrachten

Luftschlitz erfolgt eine Führung des magnetischen Flusses in die oberen und unteren Bereiche des Magnetjochs mit dem Ziel eines möglichst senkrechten Eintritts in den Öffnungsbereich zur Erzeugung des gewünschten homogenen Dipolfeldes. Die Aussparungen an den Ecken des im Querschnitt betrachteten Öffnungsbereiches führen zu einer Absenkung der magnetischen Flussdichte in ihrer Umgebung. Dadurch wird der Bereich der homogenen Flussverteilung in Richtung der Spulen am Rand vergrößert.

Zur numerischen Berechnung der elektromagnetischen Felder wird das in Abschnitt 4.3.1 für die Bestimmung der Wirbelstromverluste auf der Basis der Methode der Finiten Elemente eingesetzte Simulationswerkzeug verwendet. Zum Zweck der im folgenden unter anderem vorgestellten magnetostatischen Simulationen wird eine entsprechende Anpassung unter Beibehaltung des nichtlinearen Lösungsverfahrens vorgenommen.

4.4.1 Analytische Darstellung der magnetischen Flussdichte

Zur Herleitung eines Maßes für die Homogenität einer gegebenen räumlichen Verteilung der magnetischen Flussdichte erfolgt zunächst eine Betrachtung unter Abwesenheit einer zeitlichen Variation. Im Öffnungsbereich des Magneten innerhalb des elliptischen Strahlrohrs befindet sich ein homogenes Medium. Wird der im tatsächlichen Betrieb durchaus vorhandenen Strahlstrom, bedingt durch die Bewegung geladener Teilchen im Synchrotron, nicht berücksichtigt, ist dieser Bereich desweiteren frei von einer extern eingeprägten Stromdichte. Im statischen Fall folgt daher aus den Maxwellschen Gleichungen neben der Divergenzfreiheit der magnetischen Flussdichte auch deren Rotationsfreiheit. Insofern kann sowohl ein skalares Potential ψ als auch ein Vektorpotential \vec{A} zur Beschreibung verwendet werden. Mit $\vec{B} = -\nabla\psi$ beziehungsweise $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ergeben sich die beiden äquivalenten Potentialdarstellungen gemäß

$$-\nabla \cdot (\nabla \psi) = 0, \quad (4.45)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = 0. \quad (4.46)$$

Aus der Lösung jeder dieser beiden homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen kann gleichermaßen eine allgemeine Darstellung für die magnetische Flussdichte durch Anwendung der zugehörigen Differentialoperatoren gefunden werden.

Zweidimensionale Betrachtung

Im Rahmen der Entwicklung und Optimierung eines Designs für lange Magnete, wie den hier betrachteten SIS-100-Dipol, wird häufig zunächst eine zweidimensionale Untersuchung der Feldqualität auf dem Querschnitt vorgenommen. Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Approximation ist eine gegenüber der Diagonalen der Querschnittsfläche große Länge

des Magneten. In diesem Fall ist die transversale Verteilung der magnetischen Flussdichte in der (x, y) -Ebene über einen weiten Bereich invariant gegenüber einer longitudinalen Verschiebung in Strahlrichtung z . Somit verschwindet zum einen die partielle Ableitung $\partial/\partial z$ und zum anderen kann die Modellierung mittels des Vektorpotentials \vec{A} über eine einzelne Komponente $\vec{A} = A_z \vec{e}_z$ erfolgen. Im folgenden wird die Laplace-Gleichung (4.45) für das Skalarpotential ψ in zylindrischen Koordinaten $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ bei $z = 0$ betrachtet. Über den Separationsansatz kann die Darstellung

$$\psi = \sum_n r^n \left(\hat{b}_n \sin(n\phi) + \hat{a}_n \cos(n\phi) \right) \quad (4.47)$$

der allgemeinen Lösung für ψ unter den genannten Bedingungen angegeben werden [157]. Daraus ergibt sich durch Bildung des Gradienten innerhalb der (r, ϕ) -Ebene die radiale sowie die azimuthale Komponente der magnetischen Flussdichte zu

$$B_r(r, \phi) = - \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \left(\hat{b}_n \sin(n\phi) + \hat{a}_n \cos(n\phi) \right), \quad (4.48)$$

$$B_\phi(r, \phi) = - \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \left(\hat{b}_n \cos(n\phi) - \hat{a}_n \sin(n\phi) \right). \quad (4.49)$$

Die Koeffizienten \hat{a}_n und \hat{b}_n geben dabei die schiefsymmetrische (engl. „*skew multipole*“) beziehungsweise normale Polstärke an.

Dreidimensionale Betrachtung

Sind die getroffenen Annahmen bezüglich der Invarianz der transversalen Verteilung der magnetischen Flussdichte gegenüber longitudinalen Verschiebungen entlang der Strahlachse nicht mehr zulässig, so muss zu einer vollständig dreidimensionalen Darstellung übergegangen werden. Dieser Fall ist insbesondere gegeben, wenn die Betrachtung auf die Endbereiche von Magneten ausgedehnt wird. Desweiteren kann auf diese Weise auch die magnetische Flussdichte über den Bereich mehrerer, in Strahlrichtung angeordneter Magnete angegeben werden. Die Lösung der Laplace-Gleichung in zylindrischen Koordinaten kann für diesen Fall mit

$$\psi = - \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} n!}{2^{2k} k! (n+k)!} r^{2k} \left(A_n^{(2k)}(z) \sin(n\phi) - \tilde{A}_n^{(2k)}(z) \cos(n\phi) \right) \quad (4.50)$$

angegeben werden [158, 159]. Dabei werden durch $A_n^{(2k)}(z)$ und $\tilde{A}_n^{(2k)}(z)$ die $2k$ -ten Ableitungen von A_n und \tilde{A}_n bezüglich der z -Koordinate bezeichnet. Die Koeffizienten $A_n(z)$ und $\tilde{A}_n(z)$ selbst fassen die z -abhängigen Terme der Lösung für ψ zusammen. Desweiteren wurde für diese Schreibweise die aus dem Separationsansatz folgende Lösung durch

die Verwendung der Darstellung der modifizierten Bessel-Funktionen erster Art über einer Taylor-Reihe eingesetzt [160, 161]. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit der Notation werden die folgenden Betrachtungen unter Beschränkung auf normale Multipole durchgeführt. Die für diesen Fall gültige Lösung für das Skalarpotential ψ in Gleichung (4.50) kann damit auf die Form

$$\psi = - \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} (-1)^{k+1} g_{n,k} A_n^{(2k)}(z) \sin(n\phi) \quad (4.51)$$

gebracht werden. Dies gilt analog für die schiefsymmetrischen Multipole nach Ersetzung von $A_n^{(2k)}(z)$ durch $\tilde{A}_n^{(2k)}(z)$ sowie der Sinus- durch eine Kosinusabhängigkeit bezüglich der azimuthalen Koordinate. Nach Bildung des Gradienten ergeben sich, unter Beschränkung auf normale Multipole, die einzelnen Komponenten der magnetischen Flussdichte zu

$$B_r(r, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} (n+2k) r^{2k} (-1)^{k+1} g_{n,k} A_n^{(2k)}(z) \sin(n\phi) , \quad (4.52)$$

$$B_\phi(r, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} (-1)^{k+1} g_{n,k} A_n^{(2k)}(z) \cos(n\phi) , \quad (4.53)$$

$$B_z(r, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} (-1)^{k+1} g_{n,k} A_n^{(2k+1)}(z) \sin(n\phi) . \quad (4.54)$$

Somit wird deutlich, dass im allgemeinen dreidimensionalen Fall keine eindeutige Aufteilung der einzelnen Beiträge in Form von Multipolen anhand der zugehörigen radialen Abhängigkeit vorgenommen werden kann. Daher werden die durch eine nicht triviale z -Abhängigkeit hervorgerufenen Beiträge auch als ***pseudo-harmonische Multipole*** bezeichnet [159]. Gleichwohl ist die in Form von Gleichung (4.48) und Gleichung (4.49) beschriebene zweidimensionale Näherung in den Gleichungen (4.52) bis (4.54) für konstante Funktionen $A_n(z) = C$ enthalten. In diesem Fall verschwinden alle Ableitungen von $A_n(z)$ bezüglich z und es gilt $B_z = 0$. Desweiteren ist die Polstärke durch $\hat{b}_n = g_{n,0} A_n(z = z_0)$ gegeben. Weitere Ausführungen zu der Berechnung dreidimensionaler Multipole auf der Basis von Messungen sowie numerischen Simulationen sind unter anderem in [162, 163, 164] zu finden.

4.4.2 Definition und Auswertung der Feldqualität

Die Homogenität der magnetischen Flussdichte im Öffnungsbereich des SIS-100-Magneten wird im Rahmen der kommenden Abschnitte auf der Basis dreidimensionaler Feldsimulationen bewertet. Dennoch werden dabei ausschließlich zweidimensionale Multipole betrachtet, die anhand der Auswertung der numerischen Lösung bestimmt werden. Zur Veranschaulichung wird in Abbildung 4.24(a) zunächst eine homogene, in z -Richtung invariante

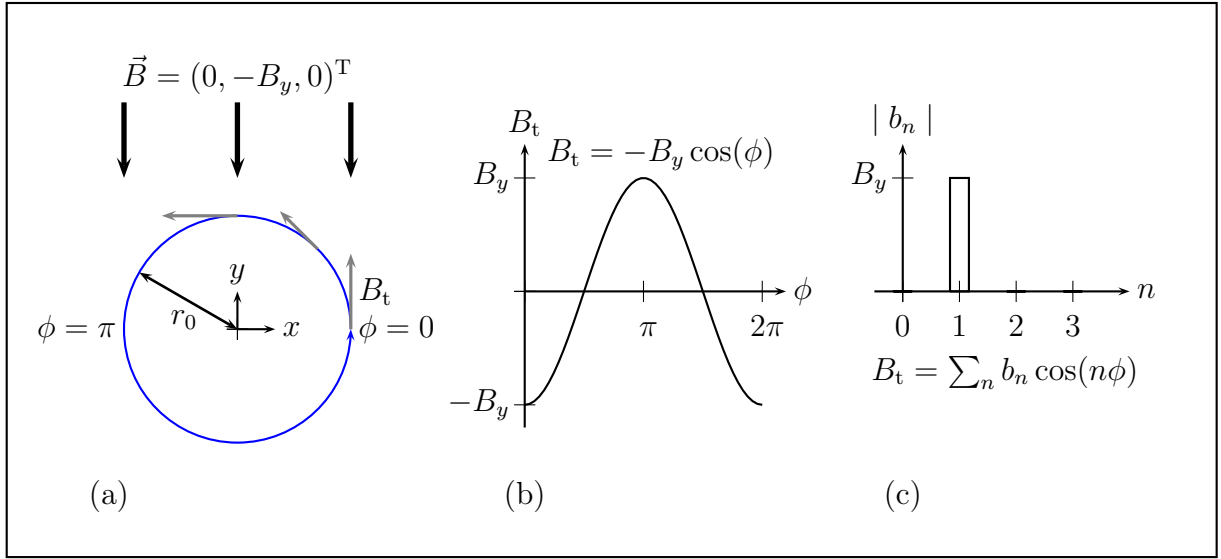


Abbildung 4.24: Veranschaulichung der Bewertung der Feldqualität: (a) Auswertung der tangentialen Komponente $B_t = B_\phi$ der magnetischen Flussdichte auf einem Kreis mit dem Radius r_0 ; (b) Verlauf von B_t über dem Winkel ϕ ; (c) Koeffizienten b_n der Entwicklung von B_ϕ in einer Fourierreihe.

Verteilung der magnetischen Flussdichte $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$ betrachtet. Deren tangentielle Komponente $B_t = B_\phi$ entlang eines Kreises mit dem Radius r_0 ist über dem Winkel ϕ in Abbildung 4.24(b) dargestellt. Eine Fourieranalyse liefert in diesem Fall die triviale Lösung für die zugehörigen spektralen Koeffizienten b_n der Fourierreihe in Abbildung 4.24(c). Für diese Koeffizienten gilt beim Vergleich mit Gleichung (4.49) der Zusammenhang $b_n = nr_0^{n-1} \hat{b}_n$ mit der Polstärke \hat{b}_n . Sie werden auch als **kreisförmige Multipolkoeffizienten** bezeichnet. Als Maß zur Quantifizierung der Feldqualität dient das Verhältnis der Koeffizienten a_n und b_n für $n \neq 1$ zu der an dieser Stelle erwünschten Dipolkomponente b_1 . Das Auftreten einzelner Gruppen von Koeffizienten ist an eventuell vorhandene Symmetrien in der zugrundeliegenden Feldverteilung gekoppelt. Im Fall einer sogenannten **Dipol-symmetrie** verschwinden alle schiefsymmetrischen Koeffizienten a_n . Weiterhin sind nur ungerade Ordnungen normaler Multipole $b_{2k-1}, k \in \mathbb{N}$ zulässig. Dieser Fall ist gegeben, wenn die felderzeugende Stromverteilung eine negative Spiegelsymmetrie bezüglich der x -Koordinate sowie eine positive Spiegelsymmetrie in y -Richtung aufweist [111]. Bei den im folgenden beschriebenen Feldsimulationen wird, wie bereits bei der Bestimmung der Wirbelstromverluste, zur Reduktion des Größe des numerischen Modells nur ein Achtel des gesamten Magneten betrachtet. Abbildung 4.25(a) zeigt das für die Berechnungen verwendete Modell des SIS-100-Magneten. Da zur Modellierung der Stromverteilung in CST EM STUDIO® ein geschlossener Pfad für die Spulen angegeben werden muss, wird zunächst die Hälfte der Struktur aufgebaut, während die weitere Einschränkung des Rechengebie-

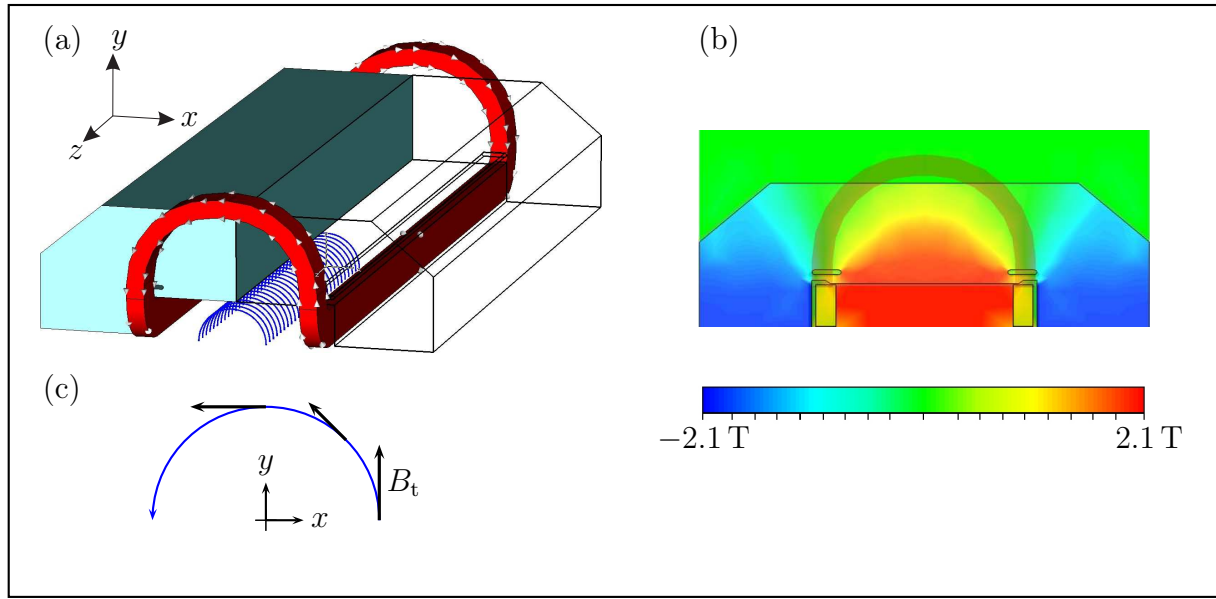


Abbildung 4.25: (a) Halbkreise entlang der z -Achse zur Auswertung der magnetischen Flussdichte; (b) Querschnitt des Magnetmodells mit der y -Komponente der magnetischen Flussdichte bei $z = 0$; (c) Auswertung der tangentialen magnetischen Flussdichte B_t auf einem Halbkreis in der (x, y) -Ebene.

tes durch die Einführung entsprechender Symmetrieebenen bei $x = 0$ und $z = 0$ erfolgt. Durch diese Vorgehensweise wird die oben beschriebene Dipolsymmetrie der Stromverteilung explizit erzwungen. Daher kann das Auftreten schiefsymmetrischer Multipole sowie der geraden Ordnungen der normalen Multipole auf diese Weise nicht untersucht werden. Abbildung 4.25(b) zeigt die Verteilung der y -Komponente der magnetischen Flussdichte in der Ebene bei $z = 0$ in der Mitte des Magneten. Ein Ansatz zur Quantifizierung der Feldqualität besteht in der Auswertung der Feldverteilung in dieser Ebene. In der Mitte des Magneten ist die Voraussetzung einer verschwindenden z -Komponente der magnetischen Flussdichte gerechtfertigt. Um jedoch auch den Verlauf der Multipolkoeffizienten entlang der z -Achse zu beschreiben, werden im Abstand Δz weitere Ebenen zur Bestimmung der Multipolkoeffizienten herangezogen. Dabei wird jedoch die in den Endbereichen auftretende Verletzung der Translationsinvarianz nicht berücksichtigt. Insofern ist die korrekte Reproduktion einer divergenzfreien Verteilung der magnetischen Flussdichte anhand der auf diese Weise bestimmten Multipole nicht möglich. Zu diesem Zweck müssten die in Gleichung (4.53) angegebenen Koeffizienten anhand der Größen $A_n(z)$ und ihrer zugehörigen Ableitungen in z -Richtung bestimmt werden. Die Auswertung erfolgt an dieser Stelle anhand der Halbkreise in Abbildung 4.25(a). Dabei wird, wie in Abbildung 4.25(c) angedeutet, die tangentiale Komponente der magnetischen Flussdichte entlang der einzelnen Halbkreise auf der Basis einer numerischen Felddlösung abgelesen. Die Anzahl der Auswertungs-

punkte muss dabei so gewählt werden, dass eine ausreichende Auflösung der gewünschten maximalen Ordnung der Multipolkoeffizienten gewährleistet ist. Aus den so gewonnenen Abtastwerten der azimuthalen Komponente der magnetischen Flussdichte $B_\phi(r = r_0, \phi_i)$ in den diskreten Winkelschritten ϕ_i folgen durch eine diskrete Fouriertransformation (DFT) die entsprechenden Multipolkoeffizienten a_n und b_n . Diese können anhand der verschiedenen, vorab definierten, Ebenen entlang der z -Richtung aufgetragen werden. Auf diese Weise kann das longitudinale Verhalten der transversalen Felder beschrieben werden. Im Unterschied dazu besteht auch die Möglichkeit einer vollständigen Entwicklung der dreidimensionalen Feldverteilung in entsprechende Multipole [160, 163, 164]. Von dieser Variante wird jedoch an dieser Stelle kein Gebrauch gemacht. Um dennoch eine Aussage über den Einfluss der unerwünschten Feldkomponenten auf den in z -Richtung durch den Magneten verlaufenden Strahl zu erhalten, erfolgt eine Integration der transversalen Multipole entlang der Strahlrichtung. Die *integralen Multipolkoeffizienten* sind dabei durch

$$b_n^{\text{int}} = \frac{\int_{z=0}^{z_{\text{max}}} g(z) b_n(z) dz}{\int_{z=0}^{z_{\text{max}}} g(z) dz} \quad (4.55)$$

mit einer Gewichtsfunktion $g(z)$ definiert, welche in diesem Fall zu $g(z) = 1/b_1(z)$ gewählt wird. Mithilfe der integralen Koeffizienten kann eine Abschätzung über die zu erwartende Feldqualität bei in z -Richtung sehr lang ausgedehnten Strukturen wie dem in diesem Fall vorliegenden SIS-100-Magneten bestimmt werden. Dazu werden zunächst die kreisförmigen Multipolkoeffizienten $b'_n(z)$ anhand eines gegenüber der tatsächlichen Länge ℓ auf die Länge ℓ' verkürzten und von $z = -\ell'$ bis $z = \ell'$ ausgedehnten Magneten berechnet. Unter der Voraussetzung einer Länge ℓ' , die ausreichend groß gegenüber der Diagonalen der Querschnittsfläche ist, weisen die entsprechenden Multipolkoeffizienten nur noch eine geringe Variation gegenüber der z -Koordinate auf. Daher können die Multipolkoeffizienten $b_n(z)$ des Magneten der vollen Länge ℓ durch

$$b_n(z) = \begin{cases} b'_n(z = 0) & \text{für } 0 \leq z \leq \ell - \ell' \\ b'_n(z - \ell + \ell') & \text{für } \ell - \ell' \leq z \leq \ell \end{cases} \quad (4.56)$$

approximiert werden. Damit wird die Feldverteilung als in z -Richtung konstant ab der Ebene $z = \ell - \ell'$ für $z \in [0, \ell - \ell']$ angenommen. Durch Einsetzen der Koeffizienten aus Gleichung (4.56) in Gleichung (4.55) ergeben sich die näherungsweise integralen Multipolkoeffizienten für den Magneten der Länge ℓ auf der Basis der Simulation einer verkürzten Anordnung.

Im Hinblick auf das elliptische Strahlrohr und die ebensolche Form des Teilchenstrahls erscheint die Bestimmung elliptischer Multipole sinnvoll, da auf diese Weise der vom Strahl eingenommene Raum besser in den Werten der Feldqualität abgedeckt wird [165]. Aus den

entsprechend auf einer elliptischen Kurve aufgenommenen Felddaten können durch eine Koordinatentransformation auch die kreisförmigen Multipole zurückgewonnen werden. Im folgenden werden dennoch nur die letztgenannten behandelt.

4.4.3 Feldqualität im statischen Fall

Die vorgestellten Berechnungen erfolgen auf der Basis der Methode der Finiten Elemente. Dazu wird im wesentlichen das in Abschnitt 4.3.1 vorgestellte Simulationswerkzeug verwendet. Somit stehen Ansatzfunktionen unterschiedlicher Ordnung in einer parallelierten Simulationsumgebung zur Verfügung. Während in den bisherigen Untersuchungen stets transiente Berechnungen durchgeführt wurden, erfolgt an dieser Stelle zunächst eine Untersuchung der Homogenität der magnetischen Flussdichte im Öffnungsbereich des SIS-100-Magneten auf der Basis magnetostatischer Simulationen. In der Folge wird das metallische Strahlrohr unter Vernachlässigung der magnetischen Eigenschaften ($\mu_r \approx 1$) nicht modelliert. Weiterhin wird bei der Homogenisierung des lamellierten Magnetjochs von einem Packungsfaktor $\gamma_{pk} = 1.0$ ausgegangen. Zur Approximation des magnetischen Vektorpotentials in der in Gleichung (3.100) gegebenen Formulierung kommen vektorielle Ansatzfunktionen mit tangentialer Stetigkeit zum Einsatz. Die Bestimmung der Feldqualität erfolgt bei dem höchsten, im Betrieb vorgesehenen, Niveau der magnetischen Flussdichte von 2.1 T. Dies entspricht einem Strom von 48 kA in den Magnetspulen. Zur Berücksichtigung der ferromagnetischen Sättigung wird das in Abschnitt 4.2.1 innerhalb jedes einzelnen Zeitschritts eingesetzte Newton-Verfahren im statischen Grenzfall $d/dt \rightarrow 0$ verwendet. Der zeitliche Aufwand der im folgenden vorgestellten Simulationen ist im Vergleich zu den im Rahmen der Berechnung der Wirbelstromverluste im transienten Betrieb benötigten gering, da das zugehörige nichtlineare Gleichungssystem lediglich einmal gelöst werden muss. Die Anzahl notwendiger Schritte innerhalb des angewandten Newton-Verfahrens ist jedoch höher, da keine geeignete Anfangslösung wie innerhalb des transienten Verfahrens vorgegeben werden kann. In der Folge ist bei vergleichbarem zeitlichen Aufwand auch der Einsatz von Ansatzfunktionen zweiter Ordnung möglich. Unter Verwendung einer räumlichen Diskretisierung bestehend aus 120 000 Tetraedern bei 140 000 Gitterkanten führt dies zu einer Anzahl an Freiheitsgraden von etwa zwei Millionen. Die Simulationszeit auf einem Prozessor mit vier Rechenkernen liegt in diesem Fall bei sieben Stunden [166]. Abbildung 4.26(a) zeigt die Auswertung der drei niedrigsten nicht verschwindenden Multipolkoeffizienten auf der Basis einer unter diesen Bedingungen bestimmten Feldlösung. Der Referenzradius beträgt dabei $r_0 = 25$ mm. Die Bestimmung der transversalen Feldqualität erfolgt in Ebenen in z -Richtung im Abstand $\Delta z = 1$ mm. Der Verlauf des Betrags der dargestellten Multipolkoeffizienten ist von der Mitte des Magne-

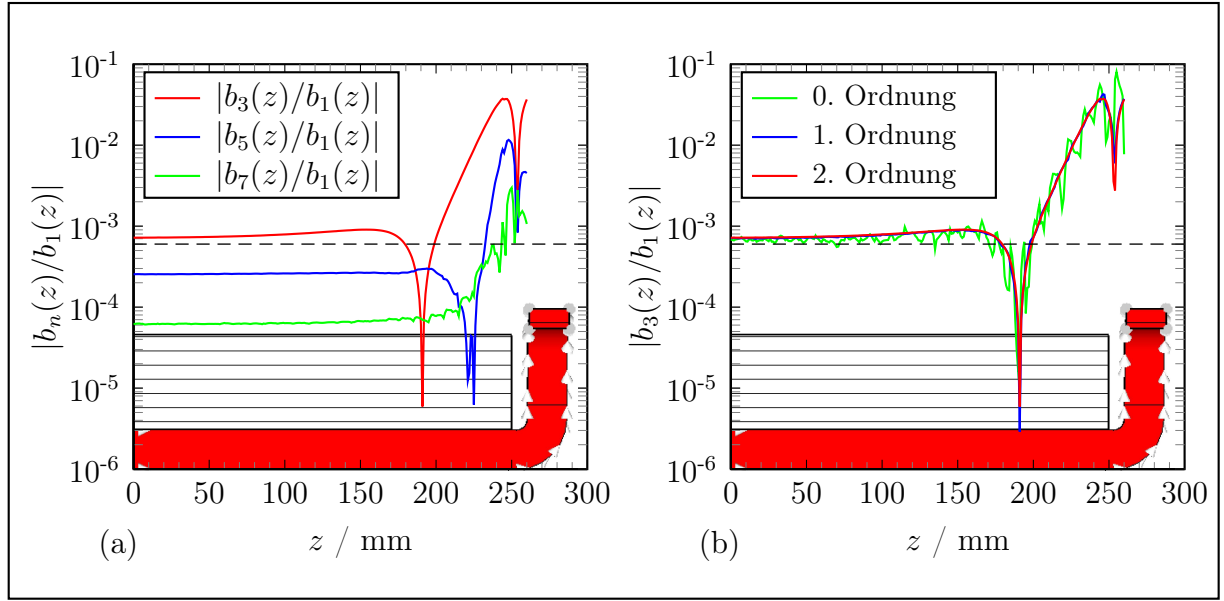


Abbildung 4.26: (a) Betrag der relativen Multipolkoeffizienten für $n = 3, 5, 7$ in halblogarithmischer Darstellung gegenüber der Position der Auswertungsebene in z -Richtung bei der Verwendung von Ansatzfunktionen 2. Ordnung; (b) Betrag des relativen Multipolkoeffizienten für $n = 3$ bei der Verwendung unterschiedlicher Ordnung der Ansatzfunktionen.

ten bei $z = 0$ aus gesehen konstant bis zu einer Position von etwa $z = 180$ mm. Im Fall der relativen Sextupolkomponente $|b_3/b_1|$ erfolgt ab dieser Stelle zunächst eine spitzenförmige Verringerung, die im Anschluss in eine starke Verschlechterung der Feldqualität in Richtung des Endbereichs des Magneten mündet. Ein ähnliches Verhalten kann bei der relativen Dekapolkomponente $|b_5/b_1|$ ab $z = 210$ mm beobachtet werden. Hingegen liegen die Komponente $|b_7/b_1|$ sowie alle höheren relativen Multipolkoeffizienten über die gesamte betrachtete Länge des Magnetjochs unterhalb der durch die geplante Anwendung geforderten Schranke von $6 \cdot 10^{-4}$. Die bei allen dargestellten Koeffizienten zu beobachtende Verschlechterung der Feldqualität ist auf die im Endbereich auftretende Verzerrung der Feldverteilung durch die notwendige Biegung der Spulen zurückzuführen. Auch lokale Effekte bedingt durch die ferromagnetische Sättigung in diesem Bereich tragen zu der Erhöhung der entsprechenden Multipolkoeffizienten bei. Zur Untersuchung der Abhängigkeit der erzielten Ergebnisse von der räumlichen Approximation wurden die Simulationen unter Verwendung eines identischen Gitters bestehend aus 140 000 Kanten in Verbindung mit Ansatzfunktionen unterschiedlicher Ordnung wiederholt. In Abbildung 4.26(b) ist die relative Sextupolkomponente über der Länge in z -Richtung bei der Verwendung von Ansatzfunktionen nullter, erster und zweiter Ordnung dargestellt. Im Fall nullter Ordnung zeigt der Kurvenverlauf eine starke Welligkeit. Dies ist bedingt durch die Tatsache, dass

Ordnung p	Anzahl Frei- heitsgrade	benötigter Arbeits- speicher / GiB	Simulations- dauer / h	integraler Multipol- koeffizient $b_3^{\text{int}} / 1 \cdot 10^{-4}$
0	140 000	0.16	0.05	16.80
1	500 000	0.70	0.75	33.06
2	2 000 000	2.80	6.25	32.79

Tabelle 4.10: Vergleich der Simulationen bei unterschiedlicher Ordnung von Ansatzfunktionen anhand einer identischen räumlichen Diskretisierung bestehend aus 120 000 Tetraedern. Die Simulationsdauer bezieht sich auf die Ausführung auf einem Prozessor mit vier Kernen bei einer Taktfrequenz von 2.4 GHz und 16 GiB Arbeitsspeicher.

bei dieser Form der Diskretisierung konstruktionsbedingt die Rotation des magnetischen Vektorpotentials $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ stückweise konstant über die einzelnen Tetraeder verläuft. Bei der Verwendung einer feineren Diskretisierung reduziert sich zwar die Welligkeit, jedoch kann dennoch kein vollständig glatter Verlauf erwartet werden. Hingegen sind die Kurven korrespondierend zu den beiden verwendeten Ansatzfunktionen höherer Ordnung bereits visuell kaum mehr zu unterscheiden. Sie verlaufen, ebenfalls bedingt durch die höhere Anzahl resultierender Freiheitsgrade, wesentlich glatter. In Tabelle 4.10 sind die Eckdaten der Simulationen zusammen mit den resultierenden integralen Multipolkoeffizienten gemäß Gleichung (4.55) zusammengefasst. Die deutliche Veränderung des integralen Koeffizienten beim Übergang von Ansatzfunktionen nullter Ordnung zu höherer Ordnung bestätigt die Notwendigkeit des Einsatzes der letztgenannten zur Erzielung zuverlässiger Ergebnisse. Jedoch erscheint die Verwendung von Ansatzfunktionen erster Ordnung im Hinblick auf die Simulationszeit verglichen mit der Veränderung in den integralen Multipolkoeffizienten als ausreichend. Insbesondere für die in Abschnitt 4.4.4 behandelten transienten Simulationen ist anderenfalls eine inakzeptabel lange Simulationsdauer zu erwarten.

Bei der logarithmischen Darstellung der relativen Multipolkoeffizienten in Abbildung 4.26 geht durch die Bildung des Absolutbetrags die Information über das Vorzeichen der Komponenten verloren. Diese wird jedoch für eventuelle Korrekturmaßnahmen zur Kompensation einzelner Multipole benötigt. Da die Größenordnung der an dieser Stelle betrachteten Koeffizienten in einer linearen Darstellung weit auseinander liegt, zeigt Abbildung 4.27(a) zunächst nur die Sextupolkomponente. Dabei ist der Verlauf der Abweichung in z -Richtung nur bis zu einer Amplitude von $\pm 1 \cdot 10^{-2}$ dargestellt um eine weitere Verkleinerung der Skalierung zu vermeiden. Zu beobachten ist, dass der Sextupolkoeffizient zunächst in derselben Richtung wie das Dipolfeld orientiert ist. Etwa bei der Position $z = 190$ mm erfolgt jedoch ein Vorzeichenwechsel. Im weiteren Verlauf treten deutlich größere Abweichungen

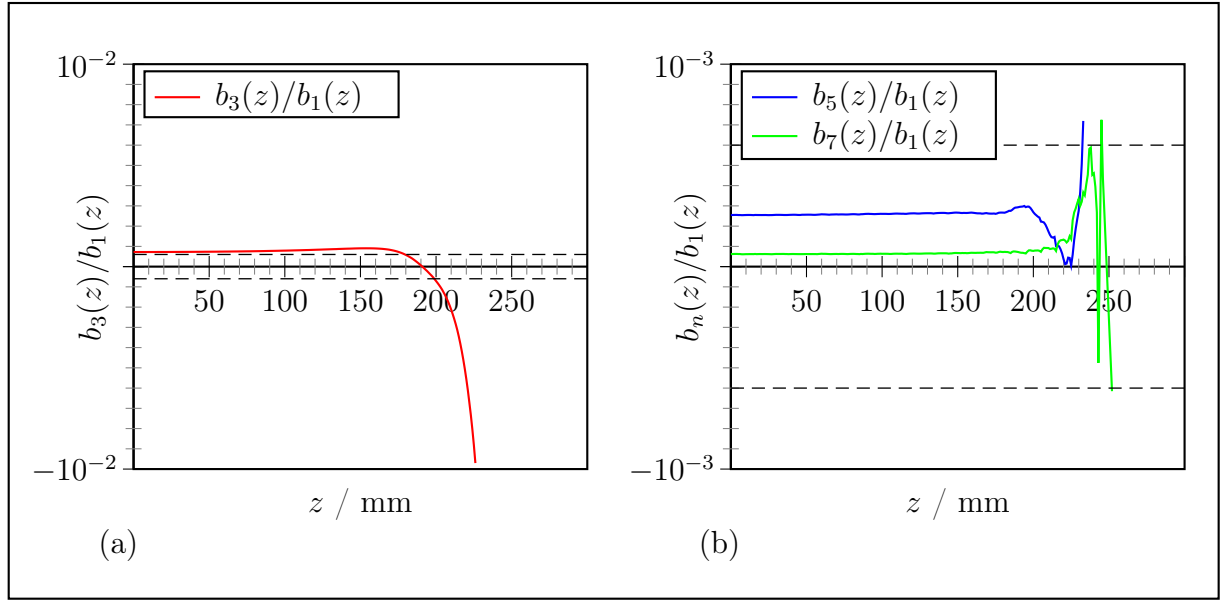


Abbildung 4.27: Verlauf der relativen Multipolkoeffizienten $b_n(z)/b_1(z)$ in linearer Darstellung: (a) Für $n = 3$ sowie (b) für $n = 5$ und $n = 7$ bei zehnfacher Streckung der Ordinate.

von der Abszisse auf als zuvor in positiver Richtung. Demgegenüber sind die Werte der übrigen Koeffizienten wesentlich kleiner. In Abbildung 4.27(b) ist der entsprechende Verlauf für die relativen Multipole $b_n(z)/b_1(z)$ mit $n = 5$ und $n = 7$ dargestellt. In beiden Fällen liegen die Werte der Koeffizienten in einem weiten Bereich innerhalb des vorgegebenen Korridors einer Abweichung von $\pm 6 \cdot 10^{-4}$. Erst in einem Bereich einiger Millimeter vor dem Ende des Magnetjochs nimmt der Wert der für diesen Fall stets positiven Dekapolkomponente stark zu. Die Multipolkomponente für $n = 7$ ist in einem weiten Bereich ebenfalls positiv. In der Umgebung von $z = 245$ mm tritt jedoch eine starke Welligkeit in Verbindung mit einigen Vorzeichenwechseln zu Tage, die durch das verwendete Verfahren zur Bestimmung der relativen Multipolkoeffizienten über die Division durch $b_1(z)$ noch verstärkt wird. Das Vorzeichen dieser Komponente ist im hier nicht dargestellten Bereich negativ bei der Annäherung an $z = 250$ mm.

Während die Koeffizienten der höheren Multipole bis auf kleinere Abweichungen im Endbereich des Magneten bereits im akzeptablen Bereich liegen, sind zur Kompensation der Sextupolkomponente weitere Korrekturmaßnahmen erforderlich. Im folgenden Abschnitt erfolgt ein Vergleich dieser Ergebnisse mit den auf der Basis transienter Berechnungen bestimmten Werten der Multipolkoeffizienten. Dabei wird auch der Einfluss von Wirbelstromeffekten sowohl im Magnetjoch als auch im Strahlrohr berücksichtigt.

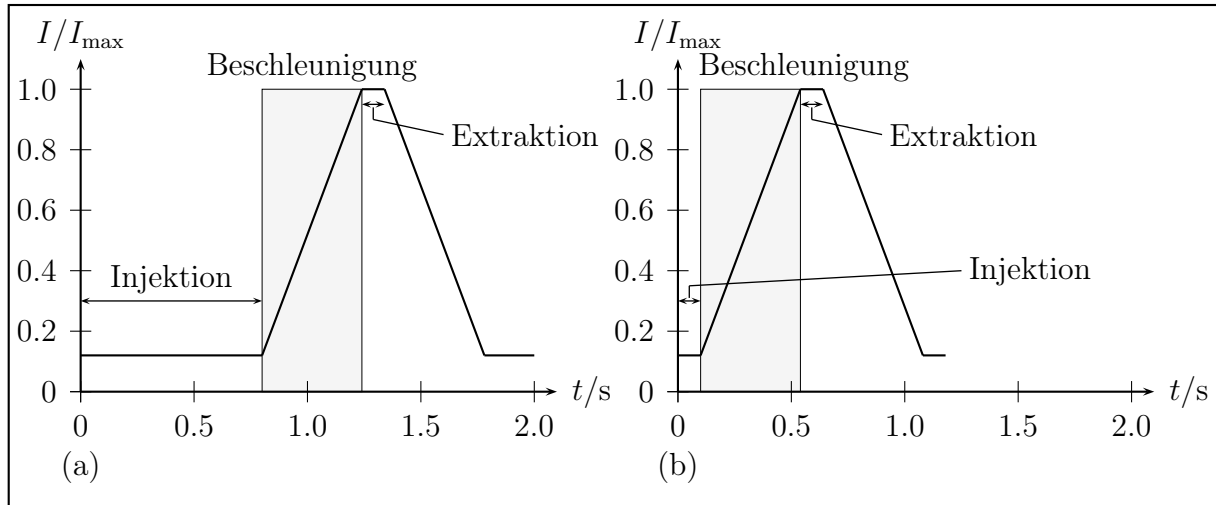


Abbildung 4.28: Zeitliche Variation der Stromdichte in den Spulen: (a) Realistischer Betriebsfall gemäß [144] und (b) mit einer, für die Durchführung der numerischen Simulationen auf 0.1 s verkürzten Injektionsphase.

4.4.4 Untersuchung der Feldqualität bei zeitabhängiger Anregung

Bedingt durch Wirbelströme sowie lokale Sättigungseffekte innerhalb des Eisenjochs des SIS-100-Magneten können bei der im Betrieb notwendigen zeitlichen Variation der magnetischen Flussdichte innerhalb des Öffnungsbereiches zusätzliche Störungen des Dipolfeldes hervorgerufen werden. Zur Untersuchung dieser Einflüsse werden, wie bereits bei der Bestimmung der durch Wirbelströme induzierten Verluste, magnetoquasistatische Simulationen ausgeführt. Die Eckpunkte des Simulationablaufes sowie die verwendeten Parameter stimmen im wesentlichen mit den in Abschnitt 4.3.1 erwähnten überein, wobei notwendige Abweichungen und Spezialisierungen im folgenden angesprochen werden. Die Simulationen erfolgen mittels der Methode der Finiten Elemente. Im Rahmen der Formulierung unter Verwendung des modifizierten magnetischen Vektorpotentials kommen an dieser Stelle ausschließlich tangential stetige vektorielle Ansatzfunktionen erster Ordnung zum Einsatz. Wie im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, ist die Wahl dieser Ordnung mindestens erforderlich, um einen ausreichend glatten Verlauf der magnetischen Flussdichte zur Auswertung der Feldqualität anhand kreisförmiger Multipole zu erhalten. Zur Homogenisierung des lamellierten Magnetjochs kommt willkürlich Materialmodell B in Verbindung mit einer konstanten relativen Permeabilität $\mu_{r,z} = 15$ zum Einsatz. Dies entspricht einem Packungsfaktor von $\gamma_{pk} = 0.9\bar{3}$. Im Unterschied zu den Simulationen bezüglich der Wirbelstromverluste wird der realistische Betriebsfall in Form der in Abbildung 4.28(a) dargestellten zeitlichen Variation des Stroms in den Spulen vorausgesetzt. Zur Verringerung des numerischen Aufwands bei der Verwendung eines konstanten Zeitschritts $\Delta t = 10$ ms wird die

Injektionsphase zu Beginn des Signals, wie in Abbildung 4.28(b) angedeutet, von 800 ms auf 100 ms verkürzt. Dies stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, da für den Zeitraum der Injektion ohnehin eine statische Verteilung der elektromagnetischen Felder vorliegt. Weiterhin wird ein Betriebszyklus isoliert betrachtet, so dass nach erneutem Erreichen des Anfangsniveaus der Anregung nur noch weitere 100 ms in der Simulation berücksichtigt werden, um eventuell auftretende Relaxationseffekte aufzunehmen. Aufgrund der in Abschnitt 4.3.2 erwähnten, im Vergleich zum untersuchten Zeitintervall, langen Relaxationszeiten der Wirbelstromeffekte im Magnetjoch liegt somit eine Beschränkung innerhalb der Untersuchung vor. Im Fall des hier verwendeten, vergleichsweise niedrigen, Packungsfaktors ist die betreffende Zeitkonstante jedoch relativ klein, so dass eventuelle unmittelbare Auswirkungen auf die Feldqualität dennoch beobachtet werden können. Die folgenden Ergebnisse wurden unter Verwendung einer räumlichen Diskretisierung mit 50 000 Tetraedern durchgeführt. Bei der Verwendung von Ansatzfunktionen erster Ordnung resultiert dies in einer Anzahl von 250 000 Freiheitsgraden zur Approximation des magnetischen Vektorpotentials. Zum Vergleich mit den in Abschnitt 4.4.3 beschriebenen magnetostatischen Simulationen wird zunächst wiederum der Verlauf der relativen Multipolkoeffizienten in z -Richtung betrachtet. Dazu wird in jeder der (x, y) -Ebenen im Abstand $\Delta z = 1$ mm der jeweils größte Wert positiven und negativen Vorzeichens der einzelnen Multipole über das gesamte Simulationsintervall $[0, t_{\max}]$ bestimmt. Da die entsprechenden Maxima und Minima nicht zwangsweise an allen räumlichen Positionen zum selben Zeitpunkt auftreten, ist ein welliger Kurvenverlauf zu erwarten, der jedoch eine obere sowie untere Schranke für die Koeffizienten liefert. Somit ist über die beiden ortsabhängigen Kurven

$$b_n^+(z) = \max_{t \in [0, t_{\max}]} b_n(z, t) \quad (4.57)$$

$$b_n^-(z) = \min_{t \in [0, t_{\max}]} b_n(z, t) \quad (4.58)$$

die Einhüllende der Kurvenschar definiert. Bei der gegebenen Ausrichtung des Magneten im Koordinatensystem und der gewählten Stromrichtung ergibt sich stets eine negative Dipolkomponente. Daher wird im Sinne einer Abschätzung des größten zu erwartenden Fehlers in Form der Multipolkomponenten zur Bestimmung der relativen Koeffizienten die Werteschar $b_1^-(z)$ eingesetzt. In Abbildung 4.29(a) ist die Einhüllende der transienten Simulationsergebnisse zusammen mit dem Ergebnis der magnetostatischen Simulation für die relative Sextupolkomponente dargestellt. Vom Mittelpunkt des Magneten aus betrachtet führt die statische Simulation bis zu einer Position von $z = 170$ mm zu einer Überschätzung der Höhe der Abweichung von dem gewünschten Dipolfeld. In diesem Bereich liegt die Einhüllende der transienten Simulationen innerhalb der vorgegebenen Toleranz von $\pm 6 \cdot 10^{-4}$. Bei einer weiteren Annäherung an die Endbereiche liegt der betragsmäßig

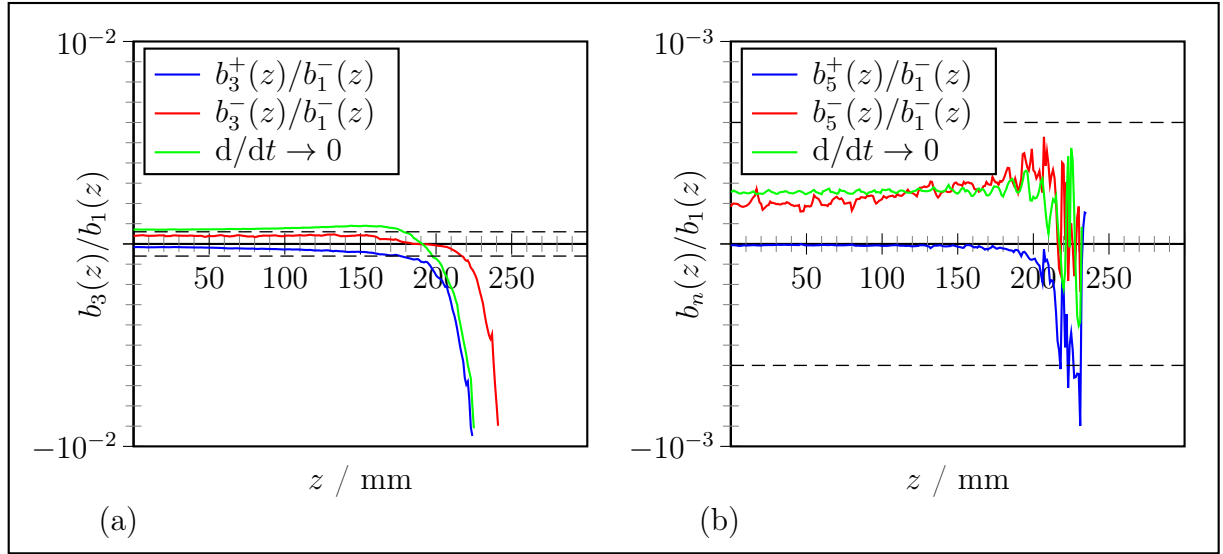


Abbildung 4.29: Vergleich zwischen magnetostatischer ($d/dt \rightarrow 0$) und magnetoquasistatischer Lösung in linearer Darstellung: (a) Für den relativen Multipolkoeffizienten mit $n = 3$ und (b) mit $n = 5$ bei zehnfacher Streckung der Ordinate.

größte Wert negativen Vorzeichens geringfügig unterhalb des aus der statischen Simulation resultierenden. Deutlichere Unterschiede ergeben sich erst in dem nicht dargestellten Bereich am Rand des Magnetjochs bei ohnehin großen Beträgen der relativen Multipolkoeffizienten. Im Fall des in Abbildung 4.29(b) gezeigten Verlaufs der Dekapolkomponente zeigen sich größere Abweichungen beim Vergleich der statischen und transienten Simulationen. Auch hier erfolgt bei der statischen Simulation zunächst eine Überschätzung der Höhe der Koeffizienten. Jedoch wird der Verlauf bereits bei $z = 140$ mm von der Einhüllenden $b_5^-(z)/b_1^-(z)$ geschnitten. Weiterhin tritt in Richtung des Endbereichs eine deutliche Vergrößerung der Koeffizienten negativen Vorzeichens bei der transienten Simulation auf. Dies lässt auf eine stärkere Auswirkung der Feldverzerrung, bedingt durch Wirbelstromeffekte, verglichen mit der Sextupolkomponente, schließen. Während bei statischer Betrachtung das Toleranzgebiet bis zu einer Position $z = 235$ mm nicht verlassen wird, zeigen die Ergebnisse der transienten Berechnung bereits in diesem Bereich eine Überschreitung der negativen Toleranzgrenze.

In einem weiteren Simulationslauf wird der Einfluss des elliptischen Strahlrohrs auf die Multipolkoeffizienten untersucht. Dabei erfolgt eine direkte Auflösung der dünnwandigen Struktur innerhalb der Volumendiskretisierung. In der Folge treten große Skalenunterschiede innerhalb des Gitters auf, die zu einer Verschlechterung der numerischen Eigenschaften der resultierenden Gleichungssysteme führen. Dieser Effekt kann durch die Implementie-

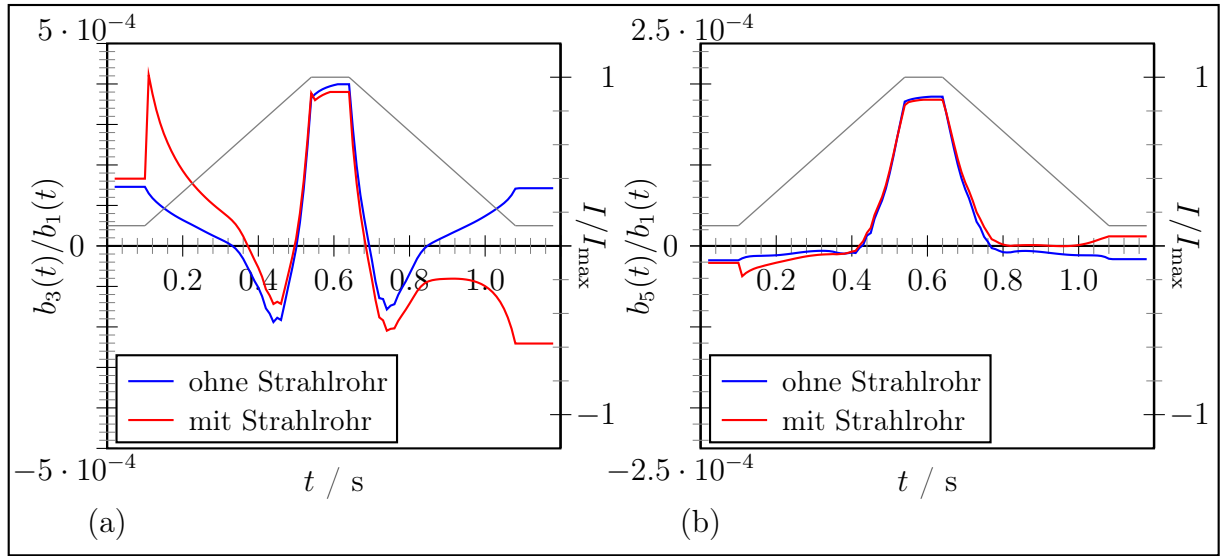


Abbildung 4.30: Einfluss des elliptischen Strahlrohrs einer Dicke von 1 mm auf die Multipolkoeffizienten in der Ebene bei $z = 0$ im Mittelpunkt des Magneten bei zeitlich veränderlicher magnetischer Flussdichte im Öffnungsbereich: (a) Für die relative Sextupolkomponente ($n = 3$) und (b) die relative Dekapolkomponente ($n = 5$) bei Streckung der Ordinate um den Faktor zwei. Das zur Anregung eingesetzte Zeitsignal ist in beiden Fällen auf der rechten Ordinate aufgetragen.

rung der in Abschnitt 4.2.3 beschriebenen Modellierung für dünne leitfähige Schichten umgangen werden. Um den negativen Einfluss einer stark inhomogenen Diskretisierung zu begrenzen, wird für die Dicke des Strahlrohrs ein Wert von $\delta = 1$ mm angenommen. Quantitativ erfolgt durch diese Vorgehensweise eine Überschätzung des Einflusses gegenüber der vorgesehenen Dicke, welche zwischen $\delta = 0.3$ mm und $\delta = 0.5$ mm liegt. Dennoch kann aus den Ergebnissen die qualitative Auswirkung der Präsenz des Strahlrohrs abgeleitet werden. Die Auswertung der magnetischen Flussdichte erfolgt wiederum auf Kreisen mit dem Radius $r = 25$ mm. In Abbildung 4.30(a) ist der zeitliche Verlauf der Sextupolkomponente in der Ebene $z = 0$ im Mittelpunkt des Magneten dargestellt. Trotz der gegebenen räumlichen Distanz zu den Endbereichen, in denen aufgrund der gekrümmten Spulen Feldverzerrungen zu erwarten sind, tritt auch bereits in der Mitte des Magneten eine Verschlechterung der Feldqualität bedingt durch die im Strahlrohr induzierten Wirbelströme auf [167]. Während der Sextupolkoeffizient in Abwesenheit des Strahlrohrs zu Beginn der Injektionsphase zunächst sinkt und einen Vorzeichenwechsel ausführt, erfolgt im Fall der Berücksichtigung des Strahlrohrs ein unmittelbarer Anstieg um $2 \cdot 10^{-4}$. In der Nähe des maximalen Anregungsstroms sowie zu Beginn der abfallenden Flanke des Signals stimmen die beiden Kurven weitgehend überein. Deutliche Unterschiede ergeben sich nach

dem Erreichen des maximalen Wertes mit negativem Vorzeichen. Ohne Berücksichtigung des Strahlrohrs führt der zeitliche Verlauf des Sextupolkoeffizienten einen Vorzeichenwechsel aus und nimmt nach erneutem Erreichen des Anfangsniveaus des Anregungsstroms in etwa denselben positiven Wert wie zu Beginn der Simulation an. Demgegenüber zeigt sich in Gegenwart des Strahlrohrs ein grundlegend anderes Verhalten. Bedingt durch die lange Relaxationszeit der Wirbelströme in homogenen Materialien verbleibt der Koeffizient im negativen Bereich. Nach einer anfänglichen Verringerung des Betrags erhöht sich der Werte bis zum Ende der abfallenden Flanke und kehrt im Unterschied zu der Konfiguration ohne Strahlrohr nicht auf das Anfangsniveau im positiven Bereich zurück. Insgesamt liegen die Werte für die Sextupolkomponente im Mittelpunkt des Magneten jedoch zu allen Zeitpunkten innerhalb des Toleranzbereiches von $\pm 6 \cdot 10^{-4}$. Für die in Abbildung 4.30(b) dargestellte relative Dekapolkomponente fallen die Unterschiede zwischen den beiden Konfigurationen weniger deutlich aus. Jedoch ist ebenfalls eine sprunghafte Änderung der Koeffizienten zu Beginn der Beschleunigungsphase bei $t = 100$ ms zu beobachten. Die Amplitude des Sprungs ist in diesem Fall mit $2 \cdot 10^{-5}$ deutlich geringer und erfolgt in den negativen Bereich. Im weiteren Verlauf zeigt sich eine vergleichsweise gute Übereinstimmung der beiden Kurven. Der Einfluss der Relaxationszeit der Wirbelströme im Strahlrohr führt auch bei der Dekapolkomponente zu einem Vorzeichenwechsel beim Vergleich der Werte der Koeffizienten zu Beginn und am Ende des betrachteten Betriebszyklus.

Anzumerken ist, dass die erhaltenen Werte aufgrund der zu Simulationszwecken vergrößerten Wandstärke des Strahlrohrs eine Überschätzung der tatsächlich zu erwartenden Effekte darstellt. Sowohl die Höhe der sprunghaften Änderung als auch die Auswirkungen der Relaxationszeit sind bei realistischen Werten im Bereich von 0.5 mm entsprechend geringer. Die bisherigen Betrachtungen erfolgten auf der Basis der Auswertung der Feldqualität im Mittelpunkt des Magneten. Zur Bewertung der mittleren zeitlichen und räumlichen Variation der magnetischen Flussdichte im Öffnungsbereich unter einer näherungsweisen Einbeziehung der Randeffekte können die in Gleichung (4.55) definierten integralen Multipolkoeffizienten herangezogen werden. Diese werden innerhalb jedes Zeitschritts im Rahmen des numerischen Lösungsverfahrens bestimmt. Für eine korrekte Beschreibung im Sinne einer Rekonstruierbarkeit einer divergenzfreien Verteilung der magnetischen Flussdichte müssen die in Abschnitt 4.4.1 beschriebenen pseudo-harmonischen Multipole herangezogen werden. In Tabelle 4.11 ist der jeweilige zeitliche Maximalwert sowie das zeitliche Mittel der integralen Sextupol- und Dekapolkomponente angegeben. Beim Vergleich der ersten beiden Datenzeilen fällt auf, dass durch das Einbringen des Strahlrohrs die integralen Multipolkoeffizienten betragsmäßig verringert werden. Im Fall der Sextupolkomponente liefert die Betrachtung von Abbildung 4.30(a) einen Erklärungsansatz. So tritt zu Beginn der

	Länge des Magnetjochs / m	Sextupol / $1 \cdot 10^{-4}$ $\max_t b_3^{\text{int}}(t)$ \bar{b}_3^{int}	Dekapol / $1 \cdot 10^{-4}$ $\max_t b_5^{\text{int}}(t)$ \bar{b}_5^{int}
ohne Strahlrohr	0.5	85 53	−17 −8
mit Strahlrohr	0.5	78 48	−11 −4
<i>ohne Strahlrohr</i>	3.002	17 8	−6 −2
<i>mit Strahlrohr</i>	3.002	16 8	−5 −1

Tabelle 4.11: Vergleich der integralen Multipolkoeffizienten b_n^{int} für $n = 3$ und $n = 5$ mit sowie ohne Berücksichtigung des elliptischen Strahlrohrs ($\delta = 1 \text{ mm}$) bei einer Magnetlänge von 0.5 m. Extrapolierte Werte gemäß Gleichung (4.56) für einen Magneten der Länge 3.002 m.

Beschleunigungsphase eine Erhöhung des Multipolkoeffizienten durch die Anwesenheit des Strahlrohrs auf. Dabei liegt deren Amplitude jedoch betragsmäßig in der Größenordnung des Plateaus während der Extraktionsphase. Weiterhin heben sich durch den Vorzeichenwechsel die positiven und negativen Komponenten bei der Bildung des zeitlichen Mittels teilweise auf. Derartige Effekte müssen bei der Beurteilung der Feldqualität anhand dieser Größe besonders beachtet werden. Die in den beiden unteren Zeilen von Tabelle 4.11 verzeichneten Werte gehen aus der Extrapolation gemäß Gleichung (4.56) auf der Basis der Simulationsergebnisse für einen Magneten der Länge 0.5 m hervor. Erwartungsgemäß zeigt die auf diese Weise erhaltene Abschätzung eine deutliche Verringerung der unerwünschten höheren Multipolkomponenten. Um einen Anhaltspunkt zur Bewertung der Zuverlässigkeit der Extrapolation zu gewinnen wird eine weitere Simulation in Abwesenheit des Strahlrohrs bei einer Länge des Magnetjochs von 1.4 m durchgeführt. Daraus folgt, bei vergleichbarer räumlicher Auflösung, ein entsprechend größeres numerisches Modell. Die auf der Basis dieses Modells erhaltenen extrapolierten Werte der integralen Koeffizienten sind in Tabelle 4.12 zusammen mit den anhand des verkürzten Modells bestimmten Daten aus Tabelle 4.11 aufgeführt. Für den Fall des Magnetjochs der Länge 1.4 m zeigt sich eine gute Übereinstimmung der aus der direkten Simulation erhaltenen Werte mit dem Ergebnis der Extrapolation. Auch die extrapolierten Werte für eine Länge von 3.002 m liegen in derselben Größenordnung bei einer leichten betragsmäßigen Überschätzung auf der Basis des kürzeren Modells.

Durch die Verwendung der beschriebenen Extrapolation gemäß Gleichung (4.56) kann ein Anhaltspunkt zur Bewertung der Feldqualität in langen Dipolmagneten gefunden werden. Auf diese Weise sind die zu berechnenden numerischen Modelle wesentlich kleiner und erfordern einen geringeren Rechenaufwand gegenüber einer Simulation der Struktur mit der vollen Länge. Trotz der weitgehenden Übereinstimmung in den integralen Koeffizien-

Länge des Magnetjochs / m		Sextupol / $1 \cdot 10^{-4}$		Dekapol / $1 \cdot 10^{-4}$	
Simulation	Extrapolation	$\max_t b_3^{\text{int}}(t)$	\bar{b}_3^{int}	$\max_t b_5^{\text{int}}(t)$	\bar{b}_5^{int}
0.5	-	85	53	-17	-8
0.5	1.4	33	19	-8	-3
0.5	3.002	17	8	-6	-2
1.4	-	32	18	-8	-3
1.4	3.002	14	7	-5	-1

Tabelle 4.12: Gegenüberstellung der berechneten und extrapolierten Werte der integralen Multipolkoeffizienten auf der Basis zweier Modelle mit unterschiedlicher Länge des Magnetjochs.

ten kann dennoch nicht vollständig auf eine zeit- und rechenaufwendige Simulation des gesamten Bauteils verzichtet werden.

5 Kombination von Finite-Elemente-Verfahren und Spektralmethoden

Um der zunehmenden Komplexität anwendungsbezogener Aufgabenstellungen im Bereich der numerischen Feldsimulation gerecht zu werden, können verschiedene Ansätze verfolgt werden. Durch die wachsende und im Vergleich zu früher kosteneffizientere Verfügbarkeit von Rechenleistung und Arbeitsspeicher bietet die Parallelisierung herkömmlicher Diskretisierungsverfahren eine Möglichkeit, auch komplexe Problemstellungen innerhalb eines akzeptablen Zeitrahmens zu simulieren. Die entweder aus einer feinen räumlichen Auflösung oder der Verwendung von Ansätzen höherer räumlicher Ordnung resultierenden numerischen Modelle weisen eine sehr große Anzahl an Freiheitsgraden auf. Durch den Einsatz effizienter Algorithmen zur Parallelisierung numerischer Lösungsverfahren kann eine hohe Genauigkeit dennoch unter Aufwendung eines akzeptablen Maßes an Simulationszeit erreicht werden. Eine weitere Möglichkeit zur Beschleunigung numerischer Simulationen in Verbindung mit der Forderung nach einer hohen Genauigkeit der Ergebnisse besteht in der Reduktion der Anzahl zur Approximation der gesuchten Größe notwendiger Freiheitsgrade. Unter Beibehaltung des zugrundeliegenden Diskretisierungsverfahrens wird dabei, beispielsweise auf algebraischer Ebene, eine reduzierte Beschreibung gesucht, welche unter Verwendung weniger, eventuell andersartiger Freiheitsgrade für eine näherungsweise Darstellung des ursprünglichen Systemverhaltens bei einer gegebenen Genauigkeitsschranke sorgt. Derartige Ansätze sind als Verfahren zur Reduktion der Modellordnung bekannt. Weiterhin besteht in der Kombination mehrerer Diskretisierungsverfahren mit unterschiedlichen Vorzügen und Nachteilen ein möglicher Ansatz, um eine hinsichtlich der Anzahl notwendiger Freiheitsgrade effiziente Problembeschreibung auf Diskretisierungsebene zu erreichen. Eine Variante dieser Strategie auf der Basis einer Gebietszerlegung in Verbindung mit der Berücksichtigung räumlicher Symmetrien wird im Rahmen dieses Kapitels verfolgt.

5.1 Ausnutzung von Symmetrien

Die steigende geometrische Komplexität zeitgemäßer Entwürfe erfordert numerische Modelle zunehmender Größe. Zusätzlich erzwingen erhöhte Anforderungen an die Genauigkeit der Modellierung den Einsatz einer sehr feinen räumlichen Diskretisierung. Bei volumenbasierten Verfahren unter Verwendung strukturierter, hexagonaler Gitter führt bereits eine Halbierung der Kantenlänge zu einer Steigerung der Anzahl an Freiheitsgraden um den Faktor acht. Daher wird nach Methoden gesucht, die komplexe Geometrien beschreiben können sowie eine erhöhte Genauigkeit bieten, ohne einer starken Verfeinerung des Gitters zu bedürfen. Zur gleichzeitigen Erfüllung der genannten Anforderungen wird in diesem Kapitel von den innerhalb des gegebenen Entwurfs vorhandenen Symmetrien Gebrauch gemacht. Mit dem Ziel einer möglichst effizienten geometrischen Beschreibung ist das größte Untervolumen gesucht, auf dessen Basis eine unverfälschte Darstellung der enthaltenen Strukturen möglich ist. Ausgehend von einer Menge geometrischer Objekte innerhalb eines endlichen Volumens Ω erfolgt eine kompakte Charakterisierung auf der Basis von Symmetrien. Den zentralen Punkt der im folgenden entwickelten Klasse hybrider Diskretisierungsverfahren bildet somit die spezielle Berücksichtigung der im Modell vorhandenen räumlichen Symmetrien. Ein Werkzeug zur universellen Beschreibung derartiger Symmetrien stellt die Gruppentheorie dar [168]. Eine Symmetriegruppe beschreibt die einem Objekt inhärenten Symmetrieeigenschaften. Diese sind durch dessen Invarianz gegenüber räumlichen Transformationen wie Spiegelung, Verschiebung und Drehung charakterisiert. Es kann zwischen finiten und unendlichen Symmetriegruppen unterschieden werden, wobei sich die Einteilung an der Anzahl der in der Gruppe enthaltenen Transformationen orientiert. Im folgenden sind jedoch lediglich die in Tabelle 5.1 aufgeführten einfachsten Ausprägungen beider Fälle relevant. Darin wird anstelle der Klassifikation anhand der Ordnung der Symmetriegruppe eine Einteilung in *vollständige* sowie *unvollständige Symmetrien* vorgenommen. Eine vollständige Symmetrie ist gegeben, wenn die Anwendung der zugehörigen Symmetrieoperationen zur Ausfüllung des gesamten Raumes bezüglich der betrachteten Koordinatenrichtung führt. Anderenfalls liegt eine unvollständige Symmetrie vor. In beiden Fällen kann eine weitere Unterteilung in *diskrete* sowie *kontinuierliche Symmetrien* erfolgen. Dabei beschreibt eine diskrete Symmetrie die periodische Wiederholung einer räumlichen Teilstruktur entlang der Symmetrierichtung. Als Grenzfall kann das Vorliegen einer kontinuierlichen Symmetrie angesehen werden, bei der sich die zu wiederholende Teilstruktur mit einer um eins reduzierten Dimension darstellen lässt. Anzumerken ist, dass im kartesischen Fall die Anwendung vollständiger Symmetrien stets mit einem Modellierungsfehler verbunden ist, während bei zylindrischen Strukturen eine exakte Abbildung des geometrischen Objekts erfolgt.

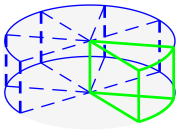
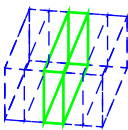
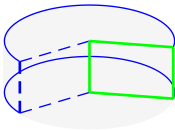
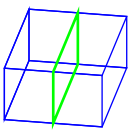
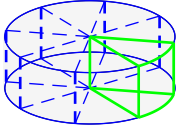
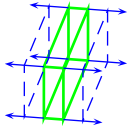
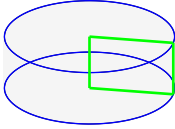
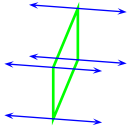
Symmetrien	diskret		kontinuierlich	
	zylindrisch	kartesisch	zylindrisch	kartesisch
unvollständig				
vollständig				

Tabelle 5.1: Ausprägungen geometrischer Symmetrien: Vollständige Symmetrien erfüllen den gesamten Raum in einer Koordinatenrichtung, während unvollständige Symmetrien lediglich ein Teilgebiet umfassen. Eine kontinuierliche Symmetrie liegt vor, wenn die Anzahl anwendbarer Symmetrieeoperationen unbeschränkt ist. Die Pfeile deuten eine unbegrenzte Ausdehnung in der zugehörigen Richtung an.

5.1.1 Vollständige kontinuierliche Symmetrien

Bei einer starken Diskrepanz in den räumlichen Abmessungen der betrachteten Struktur bei gleichzeitiger Homogenität entlang einer der Koordinatenachsen werden häufig Approximationen unter Vernachlässigung dieser Richtung eingesetzt. Dies ist äquivalent zu der impliziten Annahme einer unbegrenzten Ausdehnung beziehungsweise einer exakten Periodizität in der nicht berücksichtigten Dimension. In diesem Fall liegen kontinuierliche Symmetrien vor, da die Struktur bei der Anwendung einer beliebigen Anzahl von Transformationen bezüglich der vernachlässigten Dimension stets auf sich selbst abgebildet wird. Die Voraussetzungen zur Anwendung einer Approximation reduzierter Dimension lauten:

1. Die Materialverteilung im Inneren des betrachteten Volumens Ω unterliegt keiner Änderung in einer der Koordinatenrichtungen.
2. Es liegt keine Variation in den Randbedingungen bezüglich derselben Richtung innerhalb des verwendeten Systems vor.
3. Anregungen in Form freier Ladungen oder eingepprägter Stromverteilungen sind konstant entlang dieser Koordinatenrichtung.

Selbstverständlich müssen die genannten Bedingungen zur gleichen Zeit für eine gemeinsame Richtung erfüllt sein. Abhängig von dem verwendeten Koordinatensystem ergeben sich drei Spezialfälle kontinuierlicher Symmetrien, welche separat betrachtet werden.

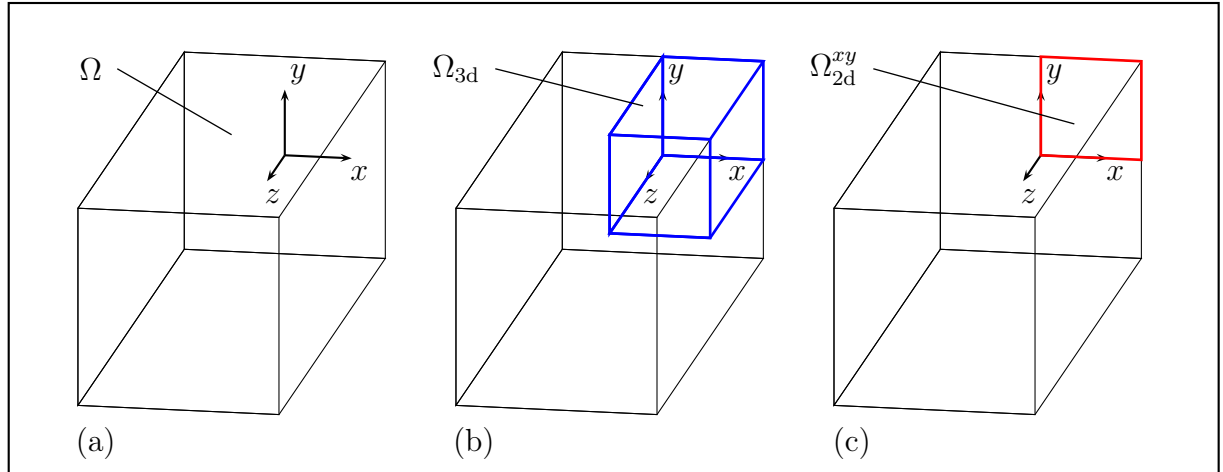


Abbildung 5.1: Berücksichtigung von Symmetrien im kartesischen Fall: (a) Betrachtetes Volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, (b) resultierendes Untervolumen $\Omega_{3d} \subset \Omega$ nach der Anwendung von drei Spiegelsymmetrien und (c) Reduktion auf die Fläche $\Omega_{2d}^{xy} \subset \mathbb{R}^2 \subset \Omega_{3d}$.

Translationssymmetrie

Im Fall eines kartesischen Koordinatensystems drückt sich eine kontinuierliche Symmetrie in einer Translationsinvarianz gegenüber der x - y - oder z -Achse aus. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit erfolgen die weiteren Betrachtungen unter der Annahme einer Invarianz in z -Richtung. Das die zu untersuchenden Strukturen umschließende Volumen sei gemäß Abbildung 5.1(a) mit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ bezeichnet. Zur Veranschaulichung des Aufwands bei einer numerischen Feldsimulation auf der Basis eines solchen Gebietes wird näherungsweise von einer Diskretisierung bestehend aus einer konstanten Anzahl n an Knotenpunkten je Koordinatenrichtung ausgegangen. Damit ist die Gesamtanzahl resultierender Knoten durch n^3 gegeben. In Gegenwart dreier diskreter Spiegelsymmetrien, wie bereits in Kapitel 4 im Fall des SIS-100-Magneten, reduziert sich diese Anzahl gemäß Abbildung 5.1(b) auf $n^3/8$ Knoten innerhalb des Gebietes $\Omega_{3d} \subset \Omega$. Dies setzt allerdings voraus, dass alle in Ω enthaltenen Objekte sowie die zur Begrenzung des Rechengebietes eingesetzten Randbedingungen der Symmetrie gehorchen. Falls die Ausdehnung des Gebietes Ω in z -Richtung deutlich größer als in den verbleibenden Koordinatenrichtungen ist, und sich weiterhin die enthaltenen Objekte durch eine Homogenität hinsichtlich der Materialparameter auszeichnen, kann zu der in Abbildung 5.1(c) dargestellten zweidimensionalen Approximation anhand der Fläche Ω_{2d}^{xy} übergegangen werden. Dabei muss jegliche Form der Anregung über Ladungen oder eingeprägte Ströme eindeutig in dieser Ebene darstellbar sein. Auch die Randbedingungen an den Positionen $z = z_{\min}$ und $z = z_{\max}$ müssen übereinstimmen, um die Symmetrie nicht zu verletzen. Sind somit die oben angegebenen Voraussetzungen 1 bis

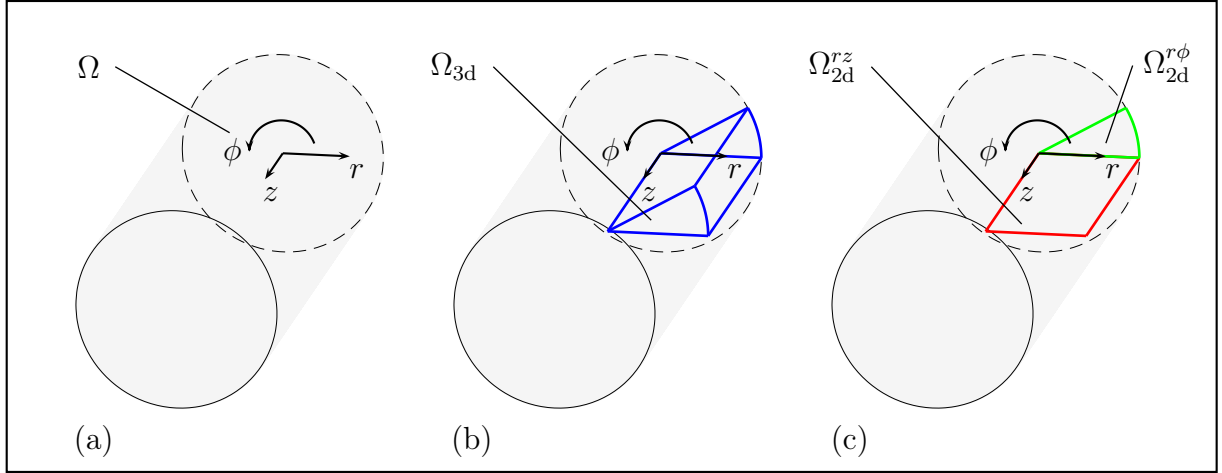


Abbildung 5.2: Berücksichtigung von Symmetrien im Fall eines zylindrischen Koordinatensystems (r, ϕ, z) : (a) Betrachtetes Volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, (b) resultierendes Untervolumen $\Omega_{3d} \subset \Omega$ nach der Anwendung einer 12-fachen diskreten Rotationssymmetrie in Verbindung mit einer Spiegelsymmetrie in z -Richtung und (c) Reduktion auf die Fläche $\Omega_{2d}^{rz} \subset \mathbb{R}^2 \subset \Omega_{3d}$ oder $\Omega_{2d}^{r\phi} \subset \mathbb{R}^2 \subset \Omega_{3d}$.

3 erfüllt, reduziert sich die zur Beschreibung des Gebietes erforderliche Anzahl an Freiheitsgraden auf $n^2/4$. Im Fall der Anwendbarkeit der zweidimensionalen Approximation ist bereits bei gegebener Modellgröße eine wesentliche höhere räumliche Auflösung als im dreidimensionalen Fall erreichbar. Zusätzlich steigt die Modellgröße bei einer Verfeinerung der räumlichen Approximation durch die auf quadratische Ordnung reduzierte Komplexität weniger schnell an, so dass auf effiziente Art und Weise eine hohe Genauigkeit in der Lösung für die elektromagnetischen Felder erzielt werden kann.

Rotationssymmetrie

Bei der Verwendung eines zylindrischen Koordinatensystems (r, ϕ, z) kann eine kontinuierliche Symmetrie bezüglich der azimuthalen Richtung ϕ auftreten. Sind in dieser Dimension die weiter oben angegebenen Voraussetzungen 1 bis 3 erfüllt, besteht die Möglichkeit der Anwendung einer zweidimensionalen Approximation. Das betrachtete Volumen, welches die zu untersuchenden Strukturen einschließt, ist in diesem Fall gemäß Abbildung 5.2(a) durch den Zylinder Ω gegeben. Somit können planar berandete Gebiete nicht exakt dargestellt werden. Werden jedoch die geschlossenen Randbedingungen in ausreichend großem Abstand zu allen Feldquellen im Inneren von Ω gesetzt, ist der induzierte Modellierungsfehler vernachlässigbar gering. Bei einer zur Diskretisierung verwendeten Knotenanzahl von n je Koordinatenrichtung beträgt die Gesamtanzahl innerhalb des Volumens wiederum n^3 . Durch die Anwendung einer Spiegelsymmetrie bezüglich der z -Richtung kann gegebenenfalls die Knotenanzahl auf die Hälfte verringert werden. Häufig ist es weiterhin möglich,

die Betrachtung auf einen Zylindersektor $\Omega_{3d} \subset \Omega$ wie in Abbildung 5.2(b) zu reduzieren. Dabei hängt, beispielsweise bei der Betrachtung von Generatoren oder elektrischen Maschinen, der Grad der möglichen Verkleinerung des Gebietes von der entsprechenden Anzahl an Polen ab. In diesem Fall ergibt sich für die Menge zur Diskretisierung erforderlicher Knoten der Wert $n^3/2k$, wobei sich der Divisor $k = 2\pi/\alpha$ anhand des betrachteten Winkelsegmentes α ergibt. Für den Übergang zu einer zweidimensionalen Approximation auf der Basis kontinuierlicher Symmetrien können gemäß Abbildung 5.2(c) je nach zugrundeliegendem Modell die Voraussetzungen 1 bis 3 auf zwei unterschiedliche Arten erfüllt sein:

- Es liegt, als Spezialfall der diskreten Rotationssymmetrie, eine kontinuierliche Transformationsinvarianz gegenüber der azimuthalen Koordinate vor. Damit erweist sich die Fläche $\Omega_{2d}^z \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ als ausreichend zur Beschreibung des Modells. Die benötigte Knotenanzahl lautet in diesem Fall $n^2/2$.
- Ist die Ausdehnung der Struktur in z -Richtung sehr groß im Vergleich zu der Ausdehnung in den verbleibenden Koordinaten, kann, in Analogie zur kartesischen Approximation reduzierter Dimension, eine kontinuierliche Symmetrie bezüglich dieser Richtung angenommen werden. Dies stellt einen Spezialfall der bereits angewandten Spiegelungssymmetrie in Abbildung 5.2(b) dar. In diesem Fall reduziert sich der Aufwand in Form erforderlicher Knoten auf n^2/k .

Beide Formen des Übergangs zu einer Approximation reduzierter Dimension führen analog zum kartesischen Fall zu einer gegenüber dem dreidimensionalen Fall um den Wert 1 verminderten Komplexitätsordnung. Somit übertragen sich die an dieser Stelle getroffenen Schlussfolgerungen bezüglich des numerischen Aufwands und der erzielbaren Genauigkeit auf den Anwendungsbereich zylindrischer Koordinatensysteme.

Sphärische Symmetrie

Die beschriebene Vorgehensweise lässt sich ebenfalls auf Anwendungsfälle unter Verwendung sphärischer Koordinatensysteme (r, ϕ, θ) übertragen. Dabei kann unter gegebenen Umständen die Betrachtung eines kugelförmig berandeten Gebietes auf entsprechende Kugelausschnitte beschränkt werden, falls die genannten Voraussetzungen 1 bis 3 beispielsweise für die azimuthale oder die polare Koordinate erfüllt sind. Das Auftreten derartiger Fälle ist bei praktischen Anwendungen jedoch eher selten. Daher wird von einer ausführlicheren Behandlung im Rahmen dieser Arbeit abgesehen.

5.1.2 Berücksichtigung der dritten Dimension

Bei der Verwendung einer Approximation reduzierter räumlicher Dimension erfüllen die aus einer numerischen Simulation resultierenden elektromagnetischen Felder nach Konstruktion dieselben Symmetrieeigenschaften. Während auf diese Weise zwar eine in Bezug auf die Simulationszeit sowie notwendige Ressourcen an Arbeitsspeicher vorteilhafte Beschreibung erreicht werden kann, ist das Anwendungsspektrum jedoch auf in zwei Dimensionen darstellbare Strukturen eingeschränkt. Insbesondere bei einer aus der praktischen Anwendung resultierenden hohen Genauigkeitsforderung an die Modellierung können dreidimensionale Effekte nicht länger vernachlässigt werden. Bei herkömmlichen Verfahren steigt beim Übergang zu einer vollständig dreidimensionalen Modellierung der Aufwand für entsprechende Feldsimulationen sprunghaft an. Eine Möglichkeit zur teilweisen Aufrechterhaltung der Vorteile zweidimensionaler Approximationen bei gleichzeitiger Berücksichtigung der ursprünglich vernachlässigten Dimension besteht in einer Reduzierung der in Abschnitt 5.1.1 definierten Anforderungen zur Einsetzbarkeit entsprechender Näherungen. Unter der Voraussetzung, dass die Darstellung der im betrachteten Volumen enthaltenen geometrischen Objekte nach wie vor über eine der beschriebenen Varianten auf eine Fläche reduzierbar ist, kann eine Erweiterung hinsichtlich der Modellierung der elektromagnetischen Felder in allen drei Raumrichtungen erfolgen. Derartige Effekte können durch die Symmetrie verletzende Randbedingungen oder extern eingeprägte Größen, wie freie Ladungen oder Ströme, hervorgerufen werden. Die Beschreibung der Geometrie verbleibt dabei zweidimensional, so dass der Effizienzvorteil gegenüber einer vollständig dreidimensionalen Modellierung mittels einer volumenbasierten Darstellung erhalten bleibt. Für kontinuierliche Symmetrien in kartesischen sowie zylindrischen Koordinaten wird die entsprechende Vorgehensweise im folgenden separat vorgestellt.

Kartesische Koordinaten

In diesem, zu Abbildung 5.1(c) korrespondierenden Fall erfolgt die Beschreibung der geometrischen Objekte anhand einer Ebene in (x, y) -Richtung. Für die Abhängigkeit der elektromagnetischen Felder in der verbleibenden Richtung wird bei einer herkömmlichen zweidimensionalen Approximation implizit eine konstante Funktion

$$f(z) = C \tag{5.1}$$

angenommen. Dementsprechend geht die Lösung an jeder Position entlang der z -Richtung über eine Translation aus der in der betrachteten Ebene Ω_{2d}^{xy} in Abbildung 5.3(a) herrschenden räumlichen Verteilung der gesuchten Felder hervor. Der Übergang zur dreidimensionalen Modellierung hinsichtlich der Feldlösung bei zweidimensionaler Darstellung der Geometrie ist von der Natur der Randbedingungen in z -Richtung abhängig. Dabei wird zwischen

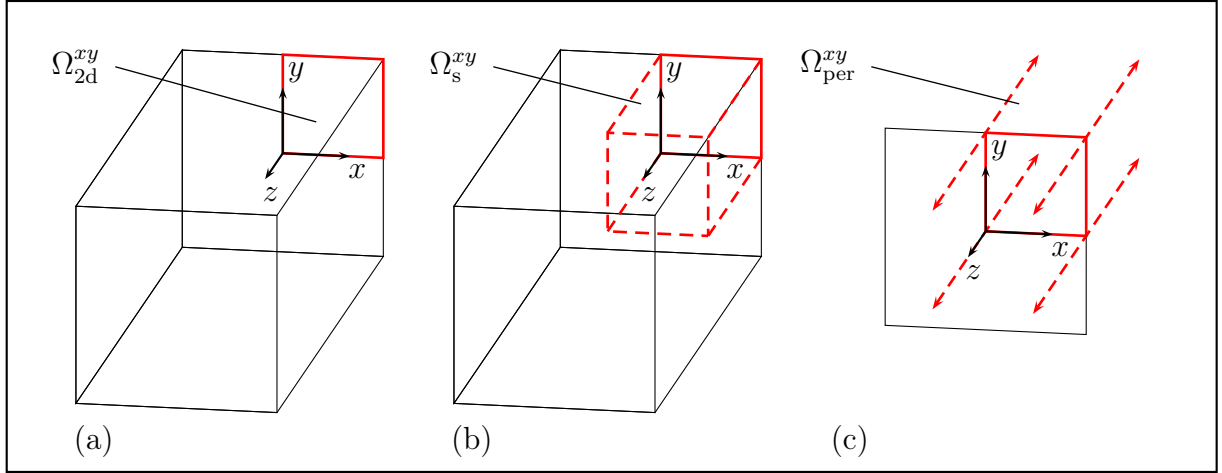


Abbildung 5.3: Übergang zu einer dreidimensionalen Modellierung im kartesischen Fall: (a) Ausgangspunkt $\Omega_{2d}^{xy} \subset \mathbb{R}^2$, (b) Erweiterung auf $\Omega_s^{xy} = \Omega_{3d} \subset \mathbb{R}^3$ bei beschränktem Gebiet und (c) Erweiterung im Fall einer Periodizität in z -Richtung auf $\Omega_{per}^{xy} \subset \mathbb{R}^3$.

einer a priori bekannten Abgeschlossenheit oder Periodizität des zugrundeliegenden Volumens Ω unterschieden. Im erstgenannten Fall erfolgt die in Abbildung 5.3(b) angedeutete Erweiterung auf das Volumen Ω_s^{xy} durch eine Ersetzung der funktionalen Abhängigkeit in Gleichung (5.1) durch eine polynomiale Beschreibung gemäß

$$f(z) = \sum_{q=0}^N d_q P_q(z/z_{\text{int}}) \quad (5.2)$$

mit $d_0 = C$ unter Verwendung von Polynomen P_q des maximalen Grades q . Durch die symmetrische Normierung auf $z_{\text{int}} = \ell_z/2$, wobei ℓ_z die Länge der Struktur in z -Richtung bezeichnet, kann die Erfüllung der Orthogonalitätsanforderungen der verwendeten Polynome sichergestellt werden. Damit ergibt sich die Feldverteilung an einer beliebigen Position in z -Richtung nicht länger durch eine einfache Translation, sondern über eine räumliche Modulation aus der Lösung in der Ebene Ω_{2d}^{xy} . Formal stimmt Ω_s^{xy} mit dem in Abbildung 5.1(b) dargestellten Volumen Ω_{3d} überein. Jedoch ist die Verteilung der Materialparameter im Gegensatz zu diesem nicht beliebig sondern unterliegt den genannten Einschränkungen bezüglich der Homogenität in z -Richtung. Für den in Abbildung 5.3(c) dargestellten Fall einer kontinuierlichen Symmetrie in Form einer Periodizität kann der funktionale Zusammenhang in Gleichung (5.1) gemäß

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^N a_q \cos(2\pi qz/\ell_z) + b_q \sin(2\pi qz/\ell_z) \quad (5.3)$$

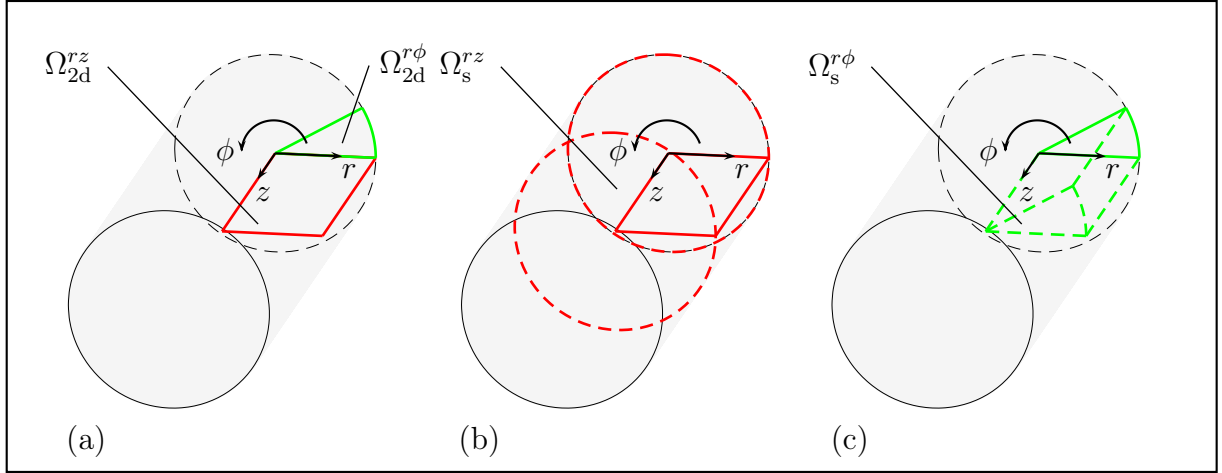


Abbildung 5.4: Übergang zu einer dreidimensionalen Modellierung im Fall zylindrischer Koordinaten: (a) Ausgangspunkt $\Omega_{2d}^{rz} \subset \mathbb{R}^2$ beziehungsweise $\Omega_{2d}^{r\phi} \subset \mathbb{R}^2$, (b) resultierendes Untervolumen $\Omega_s^{rz} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ nach der Erweiterung entlang der azimuthalen Richtung und (c) bei einer Erweiterung in z -Richtung auf das Volumen $\Omega_s^{r\phi} = \Omega_{3d} \subset \mathbb{R}^3$ unter der Annahme der Abgeschlossenheit.

mit $a_0 = C$ über harmonische Funktionen erweitert werden. Die Periodizität des Volumens Ω_{per}^{xy} ist in Abbildung 5.3(c) durch die in z -Richtung verlaufenden Pfeile angedeutet. Eine Anwendung besteht in der numerischen Simulation axial homogener Wellenleiterstrukturen [169, 170, 171]. Der ursprüngliche Fall der zweidimensionalen Approximation ist in beiden Formen der Erweiterung für $N = 0$ enthalten.

Zylindrische Koordinaten

Bei der Verwendung zylindrischer Koordinaten ergeben sich gemäß Abbildung 5.2(c) zwei Unterkategorien für die Anwendung kontinuierlicher Symmetrien. Im Fall einer Darstellung der im Volumen enthaltenen Objekte in Form der in Abbildung 5.4(a) dargestellten Fläche Ω_{2d}^{rz} , die in der (r, z) -Ebene ausgerichtet ist, folgt implizit die Annahme einer kontinuierlichen Symmetrie in der azimuthalen Richtung gemäß

$$f(\phi) = C. \quad (5.4)$$

Diese Art der zweidimensionalen Approximation wird auch als **achsensymmetrische** Modellierung bezeichnet. Sie kommt häufig bei der Berechnung zylindrischer Generatoren zum Einsatz [172]. Durch eine Modifikation des funktionalen Zusammenhangs in Gleichung (5.4) in Form einer periodischen Variation bezüglich der azimuthalen Komponente laut

$$f(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^N a_q \cos(q\phi) + b_q \sin(q\phi) \quad (5.5)$$

entsteht eine dreidimensionale Beschreibung der elektromagnetischen Felder innerhalb des Volumens Ω_s^{rz} in Abbildung 5.4(b). Aufgrund der Konstruktion in Form einer Erweiterung der achsensymmetrischen Modellierung über harmonische Funktionen wird die resultierende Darstellung auch als **achsenperiodisch** bezeichnet [173]. Weiterhin ist der Begriff einer 2.5-dimensionalen Modellierung für diese Form der Approximation einer dreidimensionalen Geometrie gebräuchlich [174]. Anwendungsgebiete ergeben sich beispielsweise bei der statischen Berechnung magnetischer Felder im Endbereich elektrischer Generatoren sowie der entsprechenden Simulation von Wirbelstromeffekten im Frequenzbereich [175, 176]. Für den Fall $N = 0$ ergibt sich aus Gleichung (5.5) die ursprüngliche achsensymmetrische Darstellung mit $a_0 = 2C$. Innerhalb der zweiten möglichen Reduktion auf die zweidimensionale Darstellung $\Omega_{2d}^{r\phi}$ in Abbildung 5.4(c) mittels einer kontinuierlichen Translationssymmetrie wird analog zum kartesischen Fall eine konstante Funktion

$$f(z) = C \quad (5.6)$$

bezüglich der z -Richtung vorausgesetzt. Über die Modifikation anhand einer polynomialen Variation gemäß Gleichung (5.2) entsteht eine dreidimensionale Darstellung für das Volumen $\Omega_s^{r\phi}$, das formal mit dem Volumen Ω_{3d} in Abbildung 5.2(b) übereinstimmt. Es gilt im Gegensatz zu letzterem lediglich die entsprechende Einschränkung bezüglich der Homogenität der Materialverteilung in z -Richtung. Ebenso ist eine periodische Variation analog zu Gleichung (5.3) denkbar, welche jedoch im weiteren nicht verfolgt wird.

5.1.3 Erweiterung der Anwendbarkeit durch Gebietszerlegung

Die beschriebene Erweiterung der herkömmlichen zweidimensionalen Modellierung führt bereits zu einer Verbesserung der Modellierungsgenauigkeit hinsichtlich der Berücksichtigung dreidimensionaler Effekte bei der Beschränkung auf eine vollständige Homogenität der Materialverteilung in einer dedizierten Koordinatenrichtung innerhalb des betrachteten Volumens. Dies stellt jedoch aus praktischer Sicht nach wie vor eine signifikante Einschränkung bezüglich der Einsetzbarkeit dieser Modellierungsvariante dar. Durch die Verwendung von Gebietszerlegungsverfahren erschließt sich jedoch ein größeres Spektrum möglicher Anwendungen. Diese basieren im allgemeinen in abstrakter Form auf einer Unterteilung des Lösungsraumes in einzelne Untergebiete [177]. An dieser Stelle erfolgt jedoch zunächst eine einfache Aufteilung auf geometrischer Basis. Als Kriterium zur Zusammenfassung einzelner Modellteile zu geeigneten Untervolumen dienen lokal vorhandene kontinuierliche Symmetrien. Aus der Vielzahl möglicher Kombinationen bezüglich der Form der äußeren Berandung des Gesamtvolumens sowie der Anzahl einzelner Untergebiete und der ihnen verbundenen Symmetrie wird die in Abbildung 5.5 dargestellte Anordnung exemplarisch

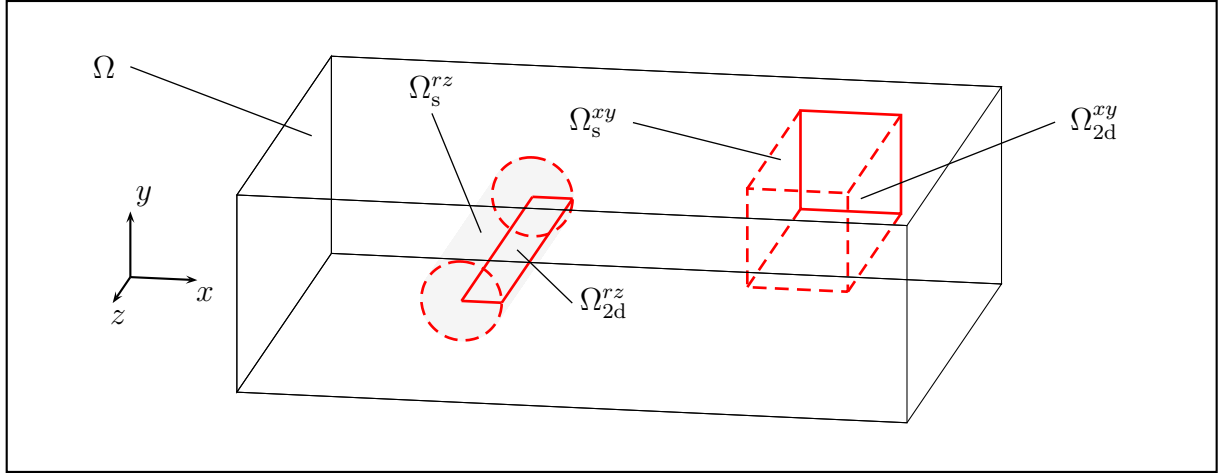


Abbildung 5.5: Innerhalb des betrachteten, planar berandeten Volumens Ω erfolgt eine exemplarische Aufteilung in Teilgebiete mit zylindrischer Symmetrie Ω_s^{rz} sowie kartesischer Translationssymmetrie Ω_s^{xy} .

herausgegriffen. Die Betrachtung erfolgt anhand eines planar berandeten quaderförmigen Volumens Ω . In vielen praktischen Anwendungsfällen ist eine Situation gegeben, in der anhand herkömmlicher Symmetrieeurwägungen zunächst keine weitere Vereinfachung abgesehen von der Berücksichtigung kartesischer Spiegelungsebenen möglich ist. Für den Fall des Auftretens lokaler Bereiche, innerhalb derer eine der erwähnten kontinuierlichen Symmetrien gegeben ist, kann die in Abschnitt 5.1.2 beschriebene Modellierung auf der Basis der Erweiterung der zweidimensionalen Approximation, entsprechend räumlich begrenzt, verwendet werden. Dies ist in Abbildung 5.5 anhand der beiden Untergebiete Ω_s^{rz} und Ω_s^{xy} angedeutet. Die angewandte Aufteilung führt zu disjunkten Teilgebieten, so dass eine nicht überlappende Gebietszerlegung vorliegt [178]. Anzumerken ist, dass diese Vorgehensweise grundsätzlich auf das Vorkommen einer größeren Anzahl an Teilgebieten erweiterbar ist. Dabei ist jedoch zu beachten, dass bei sehr vielen Untergebieten die Größe der Grenzflächen, an welchen eine Kopplung erforderlich ist, ansteigt. Damit ergibt sich ein erhöhter Aufwand im Rahmen des im folgenden Abschnitt vorgestellten Diskretisierungsverfahrens und in der Folge eine weniger effiziente Modellierung. Diese Form der Gebietszerlegung führt insbesondere zu einer Effizienzverbesserung bei numerischen Simulationen, wenn der Bereich, in welchem kontinuierliche Symmetrien vorliegen, einen möglichst großen zusammenhängenden Anteil des Gesamtvolumens ausmacht. Im folgenden sei angenommen, dass auf dem gesamten betrachteten Gebiet eine einheitliche physikalische Größe gesucht sei, die sich aus der Lösung einer elliptischen oder parabolischen partiellen Differentialgleichung ergibt. Unter Verwendung der nicht überlappenden Gebietszerlegung können unterschiedliche Verfahren zur Diskretisierung der zugrundeliegenden Differentialgleichung eingesetzt

werden, wobei die Eindeutigkeit der globalen Lösung durch entsprechende Bedingungen an den Übergängen zwischen den Symmetrieregionen und dem umgebenden Volumen Ω sichergestellt wird. Es erfolgt eine simultane Lösung des sich aus den einzelnen Teilgebieten ergebenden Gesamtsystems. Auf der Basis einer solchen geeigneten Zerlegung des betrachteten Gebietes kann eine hybride Diskretisierung unter besonderer Berücksichtigung der in Teilen des Modells vorliegenden Symmetrien definiert werden.

5.2 Hybride Ansatzfunktionen auf der Basis von Tensorprodukten

Nach der Identifikation isolierter Bereiche, die eine kontinuierliche Symmetrie aufweisen, kann für entsprechende Gebiete eine angepasste, hinsichtlich des numerischen Aufwands in Form erforderlicher Freiheitsgrade, effiziente Diskretisierung eingesetzt werden. Bei der an dieser Stelle gewählten Vorgehensweise erfolgt dies auf der Ebene der Ansatzfunktionen im Rahmen eines Galerkin-Verfahrens. Grundlage der vorgestellten Methode ist eine zweidimensionale Darstellung der im Symmetrieregion befindlichen Geometrie. Anhand einer Triangulierung der zur Modellierung gewählten Fläche wird zunächst ein herkömmliches Finite-Elemente-Verfahren in Verbindung mit skalaren oder vektoriellen Ansatzfunktionen verwendet. Durch die Bildung von Tensorprodukten mit geeigneten, an die vorliegende Symmetrie angepassten, orthogonalen Polynomen, die entlang der anfangs vernachlässigten Dimension verlaufen, erfolgt die Herleitung einer dreidimensionalen Darstellung zur Approximation des Potentials oder der Feldgröße im Zusammenhang mit der gewählten Formulierung.

5.2.1 Zweidimensionale Modellierung

Als Ausgangspunkt für das hybride Diskretisierungsverfahren auf Symmetrieregionen dienen herkömmliche Finite-Elemente-Ansatzfunktionen, wobei an dieser Stelle eine Einschränkung auf Dreieckselemente in Verbindung mit einer Approximation niedrigster Ordnung erfolgt. Analog zu den in Abschnitt 3.2 vorgestellten Ansatzfunktionen auf Tetraedern existieren verschiedene Formen, welche eine Anpassung an die aus den Maxwell'schen Gleichungen resultierenden Stetigkeitsanforderungen enthalten. Für die im weiteren durchgeführten Herleitungen ist die Betrachtung skalarer sowie tangential stetiger vektorieller Ansatzfunktionen erforderlich. Im Fall niedrigster Ordnung auf einem planaren Dreieck existieren drei Ansatzfunktionen zur Darstellung skalarer Größen, die mit jeweils einem Eckpunkt assoziiert sind. Die Betrachtung erfolgt wie im dreidimensionalen Fall

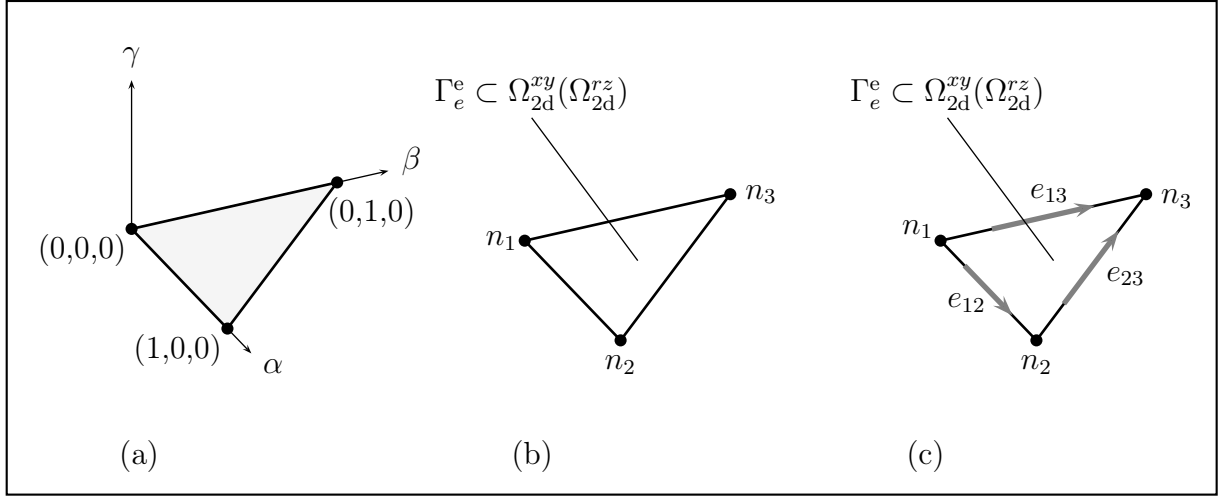


Abbildung 5.6: (a) Koordinatensystem zur Definition zweidimensionaler Ansatzfunktionen;
 (b) Planares Referenzdreieck e zur Bestimmung skalarer Ansatzfunktionen;
 (c) Konvention zur Richtung der mit den Dreiecksanten assoziierten tangential stetigen vektoriellen Ansatzfunktionen.

anhand des Referenzkoordinatensystems in Abbildung 5.6(a). Unter der Bedingung, dass jede Knotenfunktion an dem ihr zugeordneten Knoten den Wert eins annimmt, während sie an allen übrigen Eckpunkten verschwindet, ergeben sich die skalaren Ansatzfunktion erster Ordnung aus der Lösung des induzierten Interpolationsproblems. Im Referenzkoordinatensystem (α, β, γ) mit $\gamma = 0$ folgt die Darstellung

$$\lambda_1 = 1 - \alpha - \beta, \quad (5.7)$$

$$\lambda_2 = \alpha, \quad (5.8)$$

$$\lambda_3 = \beta. \quad (5.9)$$

Dabei sind die Interpolationsfunktionen, welche mit den jeweiligen Eckpunkten n_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ in Abbildung 5.6(b) assoziiert sind, mit λ_i bezeichnet. Diese auch als Flächenkoordinaten im Dreieck bezeichneten Größen werden als skalare Ansatzfunktionen

$$w_i^{s,2d} = \lambda_i \quad (5.10)$$

für Potentiale übernommen. Sie repräsentieren damit eine Projektion der in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Ansatzfunktionen auf eine der Randflächen des Tetraeders [69]. Dadurch ist die Konformität bei der Kopplung gemischter Gitter sichergestellt. Für die in Abbildung 5.6(c) bezeichnete Orientierung der Dreiecksanten können analog zum dreidimensionalen Fall vektorielle Ansatzfunktionen mit tangentialer Stetigkeit gemäß

$$\vec{w}_{i,j}^{tv,2d,xy} = w_i^{s,2d} \nabla_{2D} w_j^{s,2d} - w_j^{s,2d} \nabla_{2D} w_i^{s,2d} \quad (5.11)$$

für $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ definiert werden. Der Operator $\nabla_{2D} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0)^T$ stellt den Gradienten innerhalb der (x, y) -Ebene dar. Diese, sowie die in Gleichung (5.10) angegebenen Ansatzfunktionen kommen in dem zur Herleitung der hybriden Diskretisierung eingesetzten Tensorprodukt-Verfahren zum Einsatz. An dieser Stelle muss zunächst noch keine Unterscheidung nach der Art der kontinuierlichen Symmetrie vorgenommen werden, da sowohl im kartesischen als auch im zylindrischen Fall die Diskretisierung anhand einer planaren Fläche erfolgt.

Bei der Diskretisierung einer über ein Galerkin-Verfahren erzeugten schwachen Formulierung aus Abschnitt 2.3 treten bei elementweiser Betrachtung verschiedene, mit den entsprechenden Materialkoeffizienten verbundene Elementmatrizen auf. Im Fall einer skalaren Formulierung unter Verwendung der gegebenenfalls tensoriellen Materialparameter χ und ξ können verschiedene Steifigkeits- beziehungsweise Massenterme auftreten. Ab dieser Stelle wird zwischen der Art der zweidimensionalen Approximation unterschieden, da eine verallgemeinerte Prozedur zur Erstellung der Einträge der Elementmatrizen eingesetzt wird, welche auf der Berücksichtigung des implizit gegebenen Volumens basiert. Dies führt zu einer konsistenten Darstellung der resultierenden Matrizen bezüglich der physikalischen Einheit ihrer Einträge, welche insbesondere bei der Entwicklung gekoppelter Diskretisierungsmethoden von Vorteil ist.

Skalare Formulierung

Im allgemeinen erfolgt die im Rahmen der Galerkin-Prozedur durchgeführte Integration zur Mittelung des Residuums bei einer zweidimensionalen Betrachtung folgerichtig über eine Fläche A . Zur Sicherstellung der Konformität der über die Freiheitsgrade in Verbindung mit den Matrixeinträgen approximierten Größen wird im folgenden jedoch für den kartesischen Fall das aus einer Extrusion der Fläche um den Faktor ℓ_z entstehende Volumen $V = A\ell_z$ im Rahmen des Galerkin-Verfahrens betrachtet. Zunächst wird die Laplace-Gleichung der Elektrostatik im ladungsfreien Raum unter Verwendung des elektrischen Skalarpotentials gemäß Gleichung (3.96) betrachtet. Die Einträge der aus der Diskretisierung der schwachen Formulierung resultierenden Steifigkeitsmatrix für ein einzelnes Element lauten in diesem Fall

$$(\mathbf{K}_\chi^{\text{s,car},e})_{i,i'} = \int_{\Gamma_e} \left(\nabla_{2D} w_i^{\text{s,2d}} \cdot \chi_e \cdot \nabla_{2D} w_{i'}^{\text{s,2d}} \right) \ell_z dA \quad (5.12)$$

mit dem auf das Element e bezogenen Materialkoeffizienten $\chi_e = \varepsilon_e$. Für die physikalische Einheit der Einträge ergibt sich im elektrostatischen Fall in Analogie zum dreidimensionalen Fall Farad (A s/V). Daher kann die Bezeichnung Kapazitätsmatrix für $\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{s,car}}$ verwendet werden. Zur Bestimmung der globalen Matrix erfolgt eine Summation über die Beiträge aller Dreiecke analog zu Gleichung (3.103). Als weiteres Beispiel für eine skalare Problem-

stellung wird die Fouriersche Wärmeleitungsgleichung

$$-\nabla \cdot (\lambda_w \nabla T) + \rho_w c_h \frac{d}{dt} T = Q_w \quad (5.13)$$

in der starken Formulierung herangezogen. Dabei bezeichnet die skalare Größe T die Temperatur und Q_w die Wärmequellendichte. Die materialspezifischen Parameter sind durch die Wärmeleitfähigkeit λ_w , die Massendichte ρ_w sowie die spezifische Wärmekapazität c_h gegeben. Die schwache Formulierung im zweidimensionalen Fall, welche aus der Multiplikation der starken Formulierung mit Testfunktionen $w_{i'}^{s,2d}$ und anschließender Integration über das Volumen $A\ell_z$ hervorgeht, ist durch

$$\int_{\Gamma_e^e} \left(\lambda_w \nabla_{2D} T \cdot \nabla_{2D} w_{i'}^{s,2d} \right) \ell_z dA + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_e^e} \left(\rho_w c_h T \cdot w_{i'}^{s,2d} \right) \ell_z dA = \int_{\Gamma_e^e} Q_w \ell_z dA \quad (5.14)$$

gegeben. Die Approximation der Temperatur erfolgt analog zu der Vorgehensweise im elektrostatischen Fall über skalare Ansatzfunktionen $w_i^{s,2d}$. Nach Einsetzen der Approximation in die schwache Formulierung ergibt sich die globale Matrixgleichung

$$\left(\mathbf{K}_\chi^{s,car} + \frac{d}{dt} \mathbf{M}_\xi^{s,car} \right) \mathbf{u} = \mathbf{q}_w^{s,2d}, \quad (5.15)$$

wobei der Vektor \mathbf{u} die Freiheitsgrade bezüglich der Temperatur enthält und die Komponenten von $\mathbf{q}_w^{s,2d}$ die entsprechenden Wärmequellen repräsentieren. Die Einträge der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_\chi^{s,car}$ gehen mit $\chi_e = \lambda_{w,e}$ aus Gleichung (5.12) hervor, während die Einträge der Massenmatrix $\mathbf{M}_\xi^{s,car}$ über

$$(\mathbf{M}_\xi^{s,car,e})_{i,i'} = \int_{\Gamma_e^e} \left(w_i^{s,2d} \xi_e w_{i'}^{s,2d} \right) \ell_z dA \quad (5.16)$$

in Verbindung mit $\xi_e = \rho_{w,e} c_{h,e}$ für das Dreieck mit dem Index e gegeben sind. Um aus den Beiträgen der einzelnen Elemente die globale Darstellung zu erhalten, wird eine Summation über alle beteiligten Dreiecke analog zur Vorgehensweise bei der Steifigkeitsmatrix durchgeführt.

Ein weiterer Vorteil der beschriebenen Vorgehensweise zur Bestimmung der Elementmatrizen im Fall einer zweidimensionalen Approximation liegt in der unmittelbaren Übertragbarkeit der Darstellung auf die zylindersymmetrische Modellierung in Verbindung mit einer Rotationssymmetrie. Die Triangulierung der Fläche Ω_{2d}^{rz} in Abbildung 5.6(b) erfolgt in diesem Fall in der (r, z) -Ebene. Das Integrationsgebiet innerhalb der verallgemeinerten zweidimensionalen Modellierung besteht aus torusartigen Volumen mit einem Dreiecksquerschnitt. Im Unterschied zu einer kartesischen Approximation erfolgt die Integration

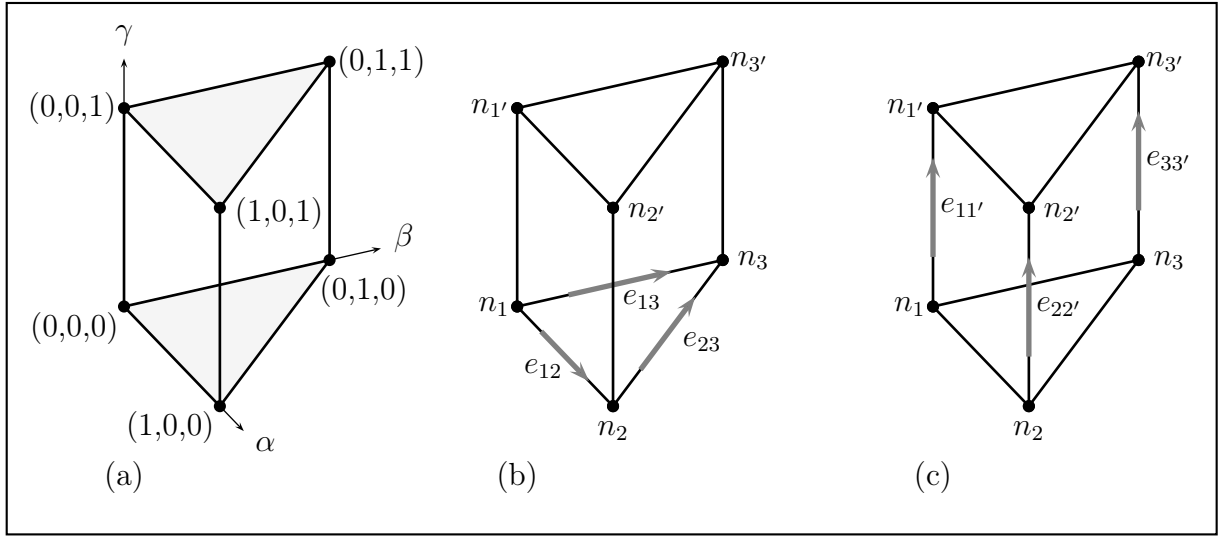


Abbildung 5.7: (a) Koordinatensystem zur Definition vektorieller Ansatzfunktionen auf Prismen; Untermenge von Ansatzfunktionen zur Diskretisierung der magnetischen Flussdichte: (b) in γ -Richtung, und (c) in der (α, β) -Ebene.

anhand des differentiellen Volumensegments $dV = r dr d\phi dz$, wobei die Auswertung entlang der azimuthalen Richtung aufgrund der vorausgesetzten Rotationsinvarianz unmittelbar eine Vereinfachung zu $dV = 2\pi r dA$ mit $dA = r dr dz$ erlaubt. Somit ergeben sich die Koeffizienten der elementweisen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_\chi^{s,cyl,e}$ sowie der Massenmatrix $\mathbf{M}_\xi^{s,cyl,e}$ für den achsensymmetrischen Fall aus ihren kartesischen Entsprechungen durch einfaches Ersetzen des Faktors ℓ_z durch $2\pi r$ innerhalb der Integrale in Gleichung (5.12) beziehungsweise Gleichung (5.16).

Vektorielle Formulierung

Die in Gleichung (5.11) definierten vektoriellen Ansatzfunktionen können im Fall kartesischer Symmetrie als Untermenge von herkömmlichen tangential stetigen Funktionen auf regulären Prismen angesehen werden. In Abbildung 5.7(a) ist ein geeignetes Referenzsystem (α, β, γ) dargestellt, wobei die Symmetrie in γ -Richtung angenommen wird. Zur Konstruktion der Ansatzfunktionen erfolgt eine Projektion der Fläche Ω_{2d}^{xy} in die (α, β) -Ebene mit $\gamma = 0$. Im Fall einer vollständigen Approximation zur Ordnung $p = 0$ in einem Prisma bei sind tangential stetigen vektoriellen Ansatzfunktionen insgesamt neun Funktionen erforderlich. Diese korrespondieren jeweils zu einer der vorkommenden Kanten. Über die Konstruktionsvorschrift ist sichergestellt, dass eine konstante Komponente der Rotation der Ansatzfunktionen exakt abgebildet werden kann. Da eine vollständig lineare Approximation in den drei vektoriellen Komponenten bereits 12 Freiheitsgrade benötigt, können lineare Variationen des Vektorfeldes innerhalb des Elements nicht in allen Raumrichtun-

dreidimensionale Ansatzfunktionen	assoziierte Kante	2D Approximation bei $\gamma = 0$	
		(α, β) -Ebene	γ -Richtung
$(1 - \gamma)(\lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1)$	e_{12}	$\lambda_1 \nabla_{2D} \lambda_2 - \lambda_2 \nabla_{2D} \lambda_1$	
$(1 - \gamma)(\lambda_2 \nabla \lambda_3 - \lambda_3 \nabla \lambda_2)$	e_{23}	$\lambda_2 \nabla_{2D} \lambda_3 - \lambda_3 \nabla_{2D} \lambda_2$	
$(1 - \gamma)(\lambda_1 \nabla \lambda_3 - \lambda_3 \nabla \lambda_1)$	e_{13}	$\lambda_1 \nabla_{2D} \lambda_3 - \lambda_3 \nabla_{2D} \lambda_1$	
$\gamma(\lambda_{1'} \nabla \lambda_{2'} - \lambda_{2'} \nabla \lambda_{1'})$	$e_{1'2'}$		
$\gamma(\lambda_{2'} \nabla \lambda_{3'} - \lambda_{3'} \nabla \lambda_{2'})$	$e_{2'3'}$		
$\gamma(\lambda_{1'} \nabla \lambda_{3'} - \lambda_{3'} \nabla \lambda_{1'})$	$e_{1'3'}$		
$\lambda_1 / h_\gamma \vec{e}_\gamma$	$e_{11'}$		$\lambda_1 / h_\gamma \vec{e}_\gamma$
$\lambda_2 / h_\gamma \vec{e}_\gamma$	$e_{22'}$		$\lambda_2 / h_\gamma \vec{e}_\gamma$
$\lambda_3 / h_\gamma \vec{e}_\gamma$	$e_{33'}$		$\lambda_3 / h_\gamma \vec{e}_\gamma$

Tabelle 5.2: Übersicht über die aus den dreidimensionalen vektoriellen Ansatzfunktionen auf Prismen hervorgehende Darstellung in einer zweidimensionalen Approximation in Abwesenheit einer Variation in γ -Richtung.

gen abgebildet werden. Für den an dieser Stelle relevanten Fall einer zweidimensionalen Approximation können zwei Untermengen des vollständigen Satzes an Ansatzfunktionen, die im Fall niedrigster Ordnung mit den Kanten assoziiert sind, herausgegriffen werden. Die erste Untermenge wird durch die in Gleichung (5.11) gegebenen drei Ansatzfunktionen, die paarweise unter Verwendung der Knoten n_1 , n_2 und n_3 entstehen, gebildet. Diese sind bezüglich ihrer räumlichen Zuordnung in Abbildung 5.7(b) dargestellt. Mittels dieser Funktionen können Feldverteilungen in der (α, β) -Ebene dargestellt werden, die keine Variation in z -Richtung aufweisen. Weiterhin werden lediglich die α - und β -Komponente des zu approximierenden Vektorfeldes betrachtet. Als unmittelbar komplementär zu diesen Eigenschaften erweist sich der in Abbildung 5.7(c) dargestellte Satz der vertikalen Ansatzfunktionen

$$\vec{w}_i^{\text{tv}, 2d, \gamma} = \frac{1}{h_\gamma} w_i^{\text{s}, 2d} \vec{e}_\gamma, \quad (5.17)$$

die mit den Knotenpaarungen $(n_i, n_{i'})$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ in Verbindung stehen. Unter Verwendung dieser Ansatzfunktionen kann eine Variation der γ -Komponente eines Vektorfeldes über die (α, β) -Ebene beschrieben werden, während die übrigen Komponenten unberücksichtigt bleiben. Weiterhin ist die modellierte γ -Komponente, der zugrundeliegenden zweidimensionalen Approximation folgend, invariant gegenüber der γ -Richtung. In Tabelle 5.2 sind die dreidimensionalen vektoriellen Ansatzfunktionen auf einem Prisma zusammen mit den sich auf der Basis der beschriebenen Vereinfachung ergebenden beiden Untermengen im Fall einer zweidimensionalen kartesischen Approximation aufgeführt.

Abhängig von den Vorzugsrichtungen innerhalb der zu untersuchenden Struktur sowie von der zu diskretisierenden Formulierung kommt eine der beiden bezeichneten Untermengen von Ansatzfunktionen zum Einsatz. Im Fall einer magnetoquasistatischen Formulierung unter Verwendung des magnetischen Vektorpotentials ist dessen Komponente in der zunächst vernachlässigten Dimension, A_z im kartesischen sowie A_ϕ im zylindrischen Fall, zur Beschreibung ausreichend. Diese Vereinfachung ist zulässig, falls die Anregung in Form einer eingepprägten Stromdichte ausschließlich in z - beziehungsweise ϕ -Richtung verläuft. Somit können zur Approximation die in der dritten Spalte von Tabelle 5.2 angegebenen Ansatzfunktionen $\vec{w}_i^{\text{tv},2\text{d},\gamma}$ verwendet werden. Die zur Normierung des Integrals über die Funktionen eingesetzte Division durch die Höhe h_γ des Prismas ergibt sich im globalen System ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu ℓ_z . Bei der Anwendung des Rotationsoperators auf diese Funktionen ergeben sich lediglich Komponenten in x - und y -Richtung. Damit sind die Einträge der bei der Diskretisierung der entsprechenden schwachen Formulierung auftretenden Elementmatrizen durch

$$(\mathbf{K}_\chi^{\text{tv},\text{car},z,e})_{i,i'} = \int_{\Gamma_e^e} \left(\chi_{e,y} \frac{dw_i^{\text{s},2\text{d}}}{dx} \frac{dw_{i'}^{\text{s},2\text{d}}}{dx} + \chi_{e,x} \frac{dw_i^{\text{s},2\text{d}}}{dy} \frac{dw_{i'}^{\text{s},2\text{d}}}{dy} \right) \frac{1}{\ell_z} dA, \quad (5.18)$$

$$(\mathbf{M}_\xi^{\text{tv},\text{car},z,e})_{i,i'} = \int_{\Gamma_e^e} \left(w_i^{\text{s},2\text{d}} \xi_{e,z} w_{i'}^{\text{s},2\text{d}} \right) \frac{1}{\ell_z} dA, \quad (5.19)$$

gegeben, wobei an dieser Stelle $\chi_e = \nu_e$ und $\xi_e = \sigma_e$ gilt. Auf diese Weise können Problemstellungen modelliert werden, innerhalb derer die magnetische Flussdichte keine z -Komponente aufweist. Für den umgekehrten Fall, in dem eine äußere Stromverteilung in der (x, y) -Ebene zu einer solchen Komponente führt, werden die in der zweiten Spalte von Tabelle 5.2 angegebenen vektoriellen Ansatzfunktionen zur zweidimensionalen Modellierung verwendet. Bei der Diskretisierung der schwachen Formulierung der magnetoquasistatischen Differentialgleichung sind in analoger Vorgehensweise die Einträge der lokalen Steifigkeits- und Massenmatrix durch

$$(\mathbf{K}_\chi^{\text{tv},\text{car},xy,e})_{i,j,i',j'} = \int_{\Gamma_e^e} \chi_{e,z} \left(\left(\nabla_{2\text{D}} \times \vec{w}_{i,j}^{\text{tv},2\text{d}} \right) \cdot \left(\nabla_{2\text{D}} \times \vec{w}_{i',j'}^{\text{tv},2\text{d}} \right) \right) \ell_z dA, \quad (5.20)$$

$$(\mathbf{M}_\xi^{\text{tv},\text{car},xy,e})_{i,j,i',j'} = \int_{\Gamma_e^e} \left(\vec{w}_{i,j}^{\text{tv},2\text{d}} \cdot \xi_{e,xy} \cdot \vec{w}_{i',j'}^{\text{tv},2\text{d}} \right) \ell_z dA, \quad (5.21)$$

gegeben. Dabei beschreibt $\chi_{e,z}$ die z -Komponente des, als diagonal vorausgesetzten, Tensors für den zugehörigen Materialparameter sowie $\xi_{e,xy}$ die gegebenenfalls ebenfalls tensorwertige Materialeigenschaft ξ innerhalb der (x, y) -Ebene. Bei der an dieser Stelle gewählten Formulierung gilt $\chi_{e,z} = \nu_{e,z}$ und $\xi_{e,xy} = \sigma_{e,xy}$.

Im Fall eines zylindrischen Koordinatensystems in Verbindung mit einer Rotationssymmetrie wird eine analoge Vorgehensweise angewandt. Wiederum wird in den Gleichungen die Größe ℓ_z durch den Term $2\pi r$ innerhalb der Integrale ersetzt. In allen weiteren koordinatenabhängigen Ausdrücken geht xy in rz sowie z in ϕ über.

Die innerhalb dieses Abschnitts vorgestellte Form der zweidimensionalen Modellierung dient als Ausgangspunkt für eine Hybridisierung mittels der Definition von Tensorprodukträumen für die Ansatzfunktionen.

5.2.2 Hybride Diskretisierung im Symmetriegebiet

Um die Vorteile einer zweidimensionalen Modellierung in Gebieten kontinuierlicher Symmetrie trotz des Auftretens dreidimensionaler Effekte ausnutzen zu können, muss eine Variation der approximierten Größe in der Symmetrierichtung berücksichtigt werden. In Abwesenheit sprunghafter Änderungen in den Materialeigenschaften in einem solchen Gebiet ist der räumliche Verlauf der elektromagnetischen Felder als Lösung der Maxwell'schen Gleichungen stetig und glatt. Daher kann der Verlauf durch den Einsatz orthogonaler Polynome im Zusammenhang mit Spektralmethoden effizient auf der Basis von Tensorprodukträumen modelliert werden. Die Herleitung erfolgt anhand eines allgemeinen Koordinatensystems (u, v, w) , welches die Eigenschaften $u \perp w$ sowie $v \perp w$ erfüllt.

Skalare Formulierung

Innerhalb eines solchen Koordinatensystems wird ein skalarer polynomialer Funktionenraum über ein Tensorprodukt entsprechender Unterräume geringerer Dimension gemäß

$$\mathcal{P}_s^{\text{fese}} = \mathcal{P}_s^{\text{fe}, u, v} \otimes \mathcal{P}_s^{\text{se}, w} \quad (5.22)$$

verwendet. Während der Raum $\mathcal{P}_s^{\text{fe}, u, v}$ von den in Abschnitt 5.2.1 dargestellten zweidimensionalen Ansatzfunktionen aufgespannt wird, kommen geeignete eindimensionale orthogonale Polynome als Basis des Funktionenraums $\mathcal{P}_s^{\text{se}, w}$ zum Einsatz. Die Wahl der Klasse dieser Polynome erfolgt, wie in Abschnitt 3.3.3 dargelegt, anhand der Topologie des durch Extrudieren auf der Basis der zur Modellierung gewählten Fläche entstehenden Gebietes. Weist dieses eine Periodizität auf, werden harmonische Funktionen angesetzt, während auf abgeschlossenen Gebieten Legendre- oder Tschebyscheff-Polynome eine geeignete Wahl darstellen. Als gemeinsame Basis des Funktionenraums $\mathcal{P}_s^{\text{fese}}$ werden die skalaren Ansatzfunktionen

$$v_{i,q}^{\text{s,fese}}(u, v, w) = w_i^{\text{s,2d}}(u, v) P_q(w) \quad (5.23)$$

als Produkt der zweidimensionalen Ansatzfunktionen mit orthogonalen Polynomen P_q des exakten Grades q definiert. Dabei erfolgt eine Normierung bezüglich der Koordinaten-

richtung, so dass w Werte zwischen -1 und 1 beziehungsweise zwischen 0 und 2π im zylindrischen Fall annimmt. Somit kann eine skalare Größe k gemäß

$$k(u, v, w) \approx \sum_q \sum_i a_{i,q}^{\text{fese}} v_{i,q}^{\text{s,fese}} \quad (5.24)$$

approximiert werden. Werden die Ansatzfunktionen $v_{i,q}^{\text{s,fese}}$ im Rahmen eines Galerkin-Verfahrens zur Diskretisierung der schwachen Formulierung der elektrostatischen Laplace-Gleichung eingesetzt, ergibt sich die Darstellung

$$\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{s,fese}} \mathbf{k}^{\text{fese}} + \mathbf{g}^{\text{fese}} = 0 \quad (5.25)$$

in Matrixform, wobei \mathbf{k}^{fese} die Freiheitsgrade $a_{i,q}$ innerhalb der Approximation in Gleichung (5.24) zusammenfasst und \mathbf{g}^{fese} die aus dem Randintegral resultierenden gewichteten elektrischen Teilflüsse beschreibt. Die Einträge der globalen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{s,fese}}$ werden wie zuvor aus den lokalen Elementmatrizen $\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{s,fese},e}$ bezüglich des Dreiecks e aufgebaut. Deren Einträge sind durch

$$(\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{s,fese},e})_{i,i',q,q'} = \int_{\Omega_s^{uv,e}} \left(\hat{\nabla} v_{i,q}^{\text{s,fese}} \cdot \varepsilon_e \cdot \hat{\nabla} v_{i',q'}^{\text{s,fese}} \right) dV \quad (5.26)$$

gegeben. Aufgrund der eingangs getroffenen Annahme zur Orthogonalität des Koordinatensystems kann der Gradientenoperator $\hat{\nabla}$ stets gemäß

$$\hat{\nabla} = \begin{pmatrix} \nabla^{(uv)} \\ \partial/\partial w \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

mit $\nabla^{(uv)} = (\partial/\partial u, \partial/\partial v)^T$ in zwei Komponenten separiert werden. In der Folge ergibt sich eine additive Darstellung bei der Auswertung des inneren Produktes in Gleichung (5.26) zu

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{s,fese},e})_{i,i',q,q'} &= \int_{\Omega_s^{uv,e}} \left(\nabla^{(uv)} v_{i,q}^{\text{s,fese}} \cdot \varepsilon_{e,uv} \cdot \nabla^{(uv)} v_{i',q'}^{\text{s,fese}} \right) dV \\ &+ \int_{\Omega_s^{uv,e}} \varepsilon_{e,w} \left(\frac{\partial}{\partial w} v_{i,q}^{\text{s,fese}} \frac{\partial}{\partial w} v_{i',q'}^{\text{s,fese}} \right) dV. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Dabei wird an dieser Stelle vorausgesetzt, dass die w -Richtung eine Hauptrichtung der verwendeten Materialien mit der tensoriellen Permittivität ε bildet. Nach Einsetzen der Definition der hybriden Ansatzfunktionen $v_{i,q}^{\text{s,fese}}$ aus Gleichung (5.23) ist eine multiplikative Zerlegung innerhalb der beiden Teilintegrale anwendbar. Diese lautet unter Verwendung

der Elementmatrizen $\mathbf{K}_\chi^{\text{s},e}$ sowie $\mathbf{M}_\xi^{\text{s},e}$ mit $\chi = \xi = \varepsilon$ gemäß Gleichung (5.12) und Gleichung (5.16) aus der zweidimensionalen Approximation in der Ebene

$$(\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{s},\text{fese},e})_{i,i',q,q'} = \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} P_q P_{q'} dw \frac{1}{f_w} (\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{s},2\text{d},e})_{i,i'} + \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \frac{dP_q}{dw} \frac{dP_{q'}}{dw} dw \frac{1}{f_w} (\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{s},2\text{d},e})_{i,i'}, \quad (5.29)$$

wobei $f_w = \ell_z$ im kartesischen und $f_w = 2\pi$ im zylindrischen Fall gilt. Um die Polynome P_q auf dem zugehörigen Orthogonalitätsintervall betrachten zu können, erfolgt eine Koordinatentransformation bezüglich der w -Richtung. Die Transformation $s \rightarrow w$ wird so gewählt, dass $s(w_{\min}) = -1$ und $s(w_{\max}) = 1$ gilt. Damit folgt

$$\int_{w_{\min}}^{w_{\max}} P_q(w) P_{q'}(w) dw = \int_{-1}^1 P_q(s) P_{q'}(s) \frac{dw}{ds} ds = f_s (\mathbf{M}_{\text{SE}})_{q,q'} \quad (5.30)$$

$$\int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \frac{dP_q(w)}{dw} \frac{dP_{q'}(w)}{dw} dw = \int_{-1}^1 \frac{f_w}{\ell_w} \frac{dP_q(s)}{ds} \frac{f_w}{\ell_w} \frac{dP_{q'}(s)}{ds} \frac{ds}{dw} ds = \frac{f_w^2}{\ell_w^2 f_s} (\mathbf{K}_{\text{SE}})_{q,q'} \quad (5.31)$$

mit $f_s = dw/ds$ und der zu der entsprechenden Klasse von orthogonalen Polynomen gehörigen Steifigkeits- beziehungsweise Massenmatrix \mathbf{K}_{SE} und \mathbf{M}_{SE} . Insgesamt ergibt sich somit die kompakte Darstellung

$$\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{s},\text{fese}} = \mathbf{M}_{\text{SE}} \otimes \frac{f_s}{f_w} \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{s},2\text{d}} + \mathbf{K}_{\text{SE}} \otimes \frac{f_w}{\ell_w^2 f_s} \mathbf{M}_\varepsilon^{\text{s},2\text{d}} \quad (5.32)$$

für die globale Steifigkeitsmatrix im Symmetriebereich. Dabei sind die zu der spektralen Diskretisierung in w -Richtung gehörigen Matrizen einheitenlos, während die Finite-Elemente-Matrizen bei dieser Formulierung in Verbindung mit den Faktoren f_s und f_w die Einheit der Kapazität (Farad, As/V) besitzen.

Vektorielle Formulierung

Zur Diskretisierung vektorieller Problemstellungen, innerhalb derer eine tangentiale Stetigkeit der approximierten Größe sichergestellt werden soll, kommen Ansatzfunktionen zum Einsatz, welche diese Eigenschaft anhand ihrer Konstruktion unmittelbar aufweisen. Im Fall der vorgestellten hybriden Diskretisierung ist der entsprechende Funktionenraum durch

$$\mathcal{P}_{\text{tv}}^{\text{fese}} = \underbrace{\mathcal{P}_{\text{tv}}^{\text{fe},u,v} \otimes \mathcal{P}_s^{\text{se},w}}_{\mathcal{P}_{\text{tv}}^{\text{fese},u,v}} \oplus \underbrace{\mathcal{P}_s^{\text{fe},u,v} \otimes \mathcal{P}_s^{\text{se},w}}_{\mathcal{P}_{\text{tv}}^{\text{fese},w}} \quad (5.33)$$

gegeben. Dieser setzt sich additiv aus zwei Unterräumen zusammen, welche ihrerseits in Form von Tensorprodukten definiert sind. Dabei sind die Teilräume orthogonal, so dass

eine direkte Summe vorliegt und eine jeweils eigenständige Basis existiert. Der Teilraum $\mathcal{P}_{\text{tv}}^{\text{fese},u,v}$ wird durch die in Gleichung (5.11) angegebenen vektoriellen Ansatzfunktionen in der (u, v) -Ebene aufgespannt. Durch ein Tensorprodukt mit eindimensionalen orthogonalen Polynomen bezüglich der verbleibenden Richtung entstehen daraus die Ansatzfunktionen

$$\vec{v}_{i,j,q}^{\text{tv,fese},uv}(u, v, w) = \vec{w}_{i,j}^{\text{tv},2d}(u, v) P_q(w/\ell_w) \quad (5.34)$$

als Basis des Funktionenraumes $\mathcal{P}_{\text{tv}}^{\text{fese},u,v}$. Dabei kommen wiederum die drei Indexpaarungen $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ bezüglich der zugrundeliegenden Knotenindizierung zum Einsatz. Eine analoge Vorgehensweise, angewandt auf die zweite Untermenge der zweidimensionalen vektoriellen Ansatzfunktionen $\vec{w}_i^{\text{tv},2d,\gamma}$ in Gleichung (5.17), liefert die Ansatzfunktionen

$$\vec{v}_{i,q}^{\text{tv,fese},w}(u, v, w) = \frac{1}{\ell_w} w_i^{\text{s},2d}(u, v) P_q(w/\ell_w) \vec{e}_w \quad (5.35)$$

zur Darstellung der w -Komponente des zu approximierenden Vektorfeldes. Sie beschreiben eine Basis des Funktionenraumes $\mathcal{P}_{\text{tv}}^{\text{fese},w}$. Durch den Faktor $\ell_w = \ell_z$ im kartesischen sowie $\ell_w = 2\pi r$ im zylindrischen Fall erfolgt eine Normierung auf die zugehörige Kantenlänge, so dass in der Folge die Integration über die Ansatzfunktion bei $q = 0$ den Wert 1 liefert. Somit ergeben sich die zur Approximation von Vektorfeldern geeigneten hybriden Ansatzfunktionen auf Gebieten mit einer kontinuierlichen Symmetrie zu

$$\vec{v}_{i,j,q}^{\text{tv,fese}}(u, v, w) = \left\{ \vec{w}_{i,j}^{\text{tv},2d,uv}(u, v) P_q(w/\ell_w), \frac{1}{\ell_w} w_i^{\text{s},2d}(u, v) P_q(w/\ell_w) \right\}. \quad (5.36)$$

Dabei variieren die Polynome P_q in w -Richtung und sind vom exakten Grad q . Zur Approximation werden separate Freiheitsgrade für die (u, v) - und die w -Komponente des Vektorfeldes gemäß

$$\vec{K}(u, v, w) \approx \sum_q \sum_{i,j} a_{i,j,q}^{\text{fese},uv} \vec{v}_{i,j,q}^{\text{tv,fese},uv} + \sum_q \sum_i a_{i,q}^{\text{fese},w} \vec{v}_{i,q}^{\text{tv,fese},w} \quad (5.37)$$

eingeführt. Werden diese Ansatzfunktionen zur Diskretisierung der schwachen Form der magnetoquasistatischen Formulierung unter Verwendung des magnetischen Vektorpotentials eingesetzt, ergeben sich bei der Betrachtung eines einzelnen Elementes die Einträge der Steifigkeits- und Massenmatrix zu

$$(\mathbf{K}_\nu^{\text{tv,fese},uv,e})_{i,j,i',j',q,q'} = \int_{\Omega_s^{uv,e}} \left(\hat{\nabla} \times \vec{v}_{i,j,q}^{\text{tv,fese}} \cdot \nu_e \cdot \hat{\nabla} \times \vec{v}_{i',j',q'}^{\text{tv,fese}} \right) dV, \quad (5.38)$$

$$(\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv,fese},e})_{i,j,i',j',q,q'} = \int_{\Omega_s^{uv,e}} \left(\vec{v}_{i,j,q}^{\text{tv,fese}} \cdot \sigma_e \cdot \vec{v}_{i',j',q'}^{\text{tv,fese}} \right) dV. \quad (5.39)$$

Wie im skalaren Fall können diese Einträge auf Tensorprodukte der bereits eingeführten Matrizen im Rahmen der Spektralmethoden sowie der zweidimensionalen Finite-Elemente-Modellierung zurückgeführt werden. Aufgrund der komponentenweisen Darstellung der Ansatzfunktionen sowie der Zerlegbarkeit des Gradientenoperators weisen die resultierenden Matrizen eine Blockstruktur auf, so dass sich die globale semidiskrete Formulierung zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}_{\nu}^{\text{tv,fese}}} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{\text{fese}}^{uv} \\ \mathbf{a}_{\text{fese}}^w \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}_{\sigma}^{\text{tv,fese}}} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{\text{fese}}^{uv} \\ \mathbf{a}_{\text{fese}}^w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{\text{fese}}^{uv} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{j}_{\text{fese}}^{uv} \\ \mathbf{j}_{\text{fese}}^w \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

in Form von Blockmatrizen der Größe (2×2) ergibt. Der Vektor $\mathbf{g}_{\text{fese}}^{uv}$ enthält dabei die aus dem Randintegralterm resultierenden gewichteten Flussgrößen. Die Darstellung erfolgt unter Separation der Freiheitsgrade sowie der rechten Seite in den unterschiedlichen Richtungen in Form von Blockvektoren. Die einzelnen Matrixblöcke ergeben sich wiederum aus einer lokalen Betrachtung der inneren Produkte aus Ansatz- und Testfunktionen im Rahmen des Galerkin-Verfahrens.

Steifigkeitsmatrix

Der Beitrag \mathbf{A}_{11} beschreibt eine Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\nu}^{\text{tv,fese,uv}}$, welche auf der Basis der Ansatzfunktionen $\vec{v}^{\text{tv,fese,uv}}$ in der (u, v) -Ebene entsteht. Diese setzt sich wie im skalaren Fall additiv aus zwei Anteilen zusammen, welche zu der (u, v) - beziehungsweise w -Komponente der Rotation der Ansatzfunktionen korrespondieren. Die Einträge der lokalen Matrix auf dem Element e lauten

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{\nu}^{\text{tv,fese,uv,e}})_{i,j,i',j',q,q'} &= \int_{\Omega_s^{uv,e}} \left(\nu_{e,w} \left(\nabla_{2D} \times \vec{w}_{i,j}^{\text{tv,2d,uv}} P_q \right)_w \left(\nabla_{2D} \times \vec{w}_{i',j'}^{\text{tv,2d,uv}} P_{q'} \right)_w \right) dV \\ &+ \int_{\Omega_s^{uv,e}} \left(\left(\vec{w}_{i,j}^{\text{tv,2d,uv}} \frac{\partial P_q}{\partial w} \right) \cdot \nu_{e,uvw} \cdot \left(\vec{w}_{i',j'}^{\text{tv,2d,uv}} \frac{\partial P_{q'}}{\partial w} \right) \right) dV, \quad (5.41) \end{aligned}$$

wobei bei dieser Notation bezüglich des zweiten Summanden eine in der (u, v) -Ebene isotrope Materialeigenschaft vorausgesetzt wird. Nach einer Separation bezüglich der orthogonalen Polynome in w -Richtung innerhalb der Integranden ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (5.30) und Gleichung (5.31) die Darstellung

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{\nu}^{\text{tv,fese,uv,e}})_{i,j,i',j',q,q'} &= f_s (\mathbf{M}_{\text{SE}})_{q,q'} \frac{1}{f_w} (\mathbf{K}_{\nu}^{\text{tv,2d,uv,e}})_{i,j,i',j'} \\ &+ \frac{f_w^2}{\ell_w^2 f_s} (\mathbf{K}_{\text{SE}})_{q,q'} \frac{1}{f_w} (\mathbf{M}_{\nu}^{\text{tv,2d,uv,e}})_{i,j,i',j'} \quad (5.42) \end{aligned}$$

mit den Matrizen aus der zweidimensionalen vektoriellen Modellierung sowie den Koeffizienten f_s und f_w , die mit der Transformation des Intervalls in w -Richtung sowie der Art des Koordinatensystems verbunden sind. Für die globale Teilmatrix ergibt sich somit

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{K}_\nu^{\text{tv,fese},uv} = \mathbf{M}_{\text{SE}} \otimes \frac{f_s}{f_w} \mathbf{K}_\nu^{\text{tv},2d,uv} + \mathbf{K}_{\text{SE}} \otimes \frac{f_w}{\ell_w^2 f_s} \mathbf{M}_\nu^{\text{tv},2d,uv} \quad (5.43)$$

unter Verwendung einer Tensorproduktnotation. Der Gesamtbeitrag wie auch die aus der zweidimensionalen vektoriellen Modellierung resultierenden Teilmatrizen in Verbindung mit den Koeffizienten f_s und f_w besitzen die Einheit des magnetischen Widerstands ($\text{A}/(\text{Vs})$) und werden daher auch als Reluktanzmatrizen bezeichnet. Der Anteil \mathbf{A}_{22} innerhalb der blockweisen Darstellung in Gleichung (5.40) beschreibt die zu den hybriden Ansatzfunktionen in w -Richtung gehörige Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_\nu^{\text{tv,fese},w}$. Da für die betreffenden Ansatzfunktionen $\vec{v}_{i,q}^{\text{tv,fese},w}$ nur die w -Komponente von Null verschieden ist, liegt das Ergebnis der Anwendung des Rotationsoperators in der (u, v) -Ebene. Die Auswertung des entsprechenden inneren Produktes in der schwachen Formulierung liefert für die Einträge der lokalen Elementmatrix

$$(\mathbf{K}_\nu^{\text{tv,fese},w,e})_{i,i',q,q'} = \int_{\Omega_s^{uv,e}} \left(\left(\nabla_{2D} \times \vec{w}_i^{\text{tv},2d,w} P_q \right) \cdot \nu_{e,uvw} \cdot \left(\nabla_{2D} \times \vec{w}_{i'}^{\text{tv},2d,w} P_{q'} \right) \right) \frac{1}{\ell_w^2} dV. \quad (5.44)$$

Durch Umgruppierung der Produkte innerhalb des Integrals können die einheitenlosen spektralen Beiträge isoliert werden und in analoger Vorgehensweise wie zuvor ergeben sich die Einträge der lokalen Elementmatrix zu

$$(\mathbf{K}_\nu^{\text{tv,fese},w,e})_{i,i',q,q'} = f_s (\mathbf{M}_{\text{SE}})_{q,q'} \frac{1}{f_w} (\mathbf{K}_\nu^{\text{tv},2d,w,e})_{i,i'}, \quad (5.45)$$

wobei beim Übergang zu dieser Notation wiederum isotrope Materialeigenschaften in der Ebene vorausgesetzt werden. Damit ist die globale Darstellung durch

$$\mathbf{A}_{22} = \mathbf{K}_\nu^{\text{tv,fese},w} = \mathbf{M}_{\text{SE}} \otimes \frac{f_s}{f_w} \mathbf{K}_\nu^{\text{tv},2d,w} \quad (5.46)$$

gegeben. Das Ergebnis ist konsistent zu dem für den Beitrag \mathbf{A}_{11} erhaltenen, da die Einträge wiederum die Einheit der Reluktanz aufweisen.

Die Kopplung zwischen den Komponenten in (u, v) - und w -Richtung wird durch die Blockmatrix \mathbf{A}_{12} beschrieben. Da das innere Produkt zur Bestimmung der Einträge kommutativ ist, gilt $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{12}^T$. Die Komponenten der Ansatzfunktionen sind in dem gewählten Koordinatensystem nach Konstruktion orthogonal. Diese Eigenschaft überträgt sich jedoch im allgemeinen nicht auf deren räumliche Ableitungen. Daher ergeben sich im Fall der Steifigkeitsmatrix von Null verschiedene Kopplungsblöcke. Diese sind mit der Matrix $\mathbf{L}_\nu^{\text{tv,fese}}$

über deren lokale Elementmatrizen mit den Einträgen

$$(\mathbf{L}_\nu^{\text{tv,fese},e})_{i,i',j',q,q'} = \int_{\Omega_s^{uv,e}} \left((\hat{\nabla} \times \vec{v}_{i,q}^{\text{tv,fese},w}) \cdot \nu_e \cdot (\hat{\nabla} \times \vec{v}_{i',j',q'}^{\text{tv,fese},uv}) \right) dV \quad (5.47)$$

gegeben. Da die w -Komponente der Rotation des ersten Faktors verschwindet, müssen im weiteren lediglich die zu der (u, v) -Ebene gehörigen Terme betrachtet werden. Unter Annahme einer isotropen Materialeigenschaft in der (u, v) -Ebene kann die Notation gemäß

$$(\mathbf{L}_\nu^{\text{tv,fese},e})_{i,i',j',q,q'} = - \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} P_q \frac{f_w}{\ell_w} \frac{dP_{q'}}{dw} dw \frac{\ell_w}{f_w} \underbrace{\int_{\Omega_{2d}^{uv,e}} \left(\nabla_{2D} w_i^{s,2d} \cdot \nu_e \cdot \vec{w}_{i',j'}^{\text{tv},2d,uv} \right) \frac{1}{\ell_w} dA}_{(\mathbf{L}_\nu^{\text{tv},2d,e})_{i,i',j'}} \quad (5.48)$$

erfolgen. Analog zu der Vorgehensweise zur Bestimmung der spektralen Koeffizienten \mathbf{K}_{SE} und \mathbf{M}_{SE} ist der Faktor, der die orthogonalen Polynome sowie deren Ableitung erhält, nach einer Koordinatentransformation metrikfrei. Unter der Transformation $w \rightarrow s$ ergibt sich

$$\int_{w_{\min}}^{w_{\max}} P_q \frac{f_w}{\ell_w} \frac{dP_{q'}(w)}{dw} dw = \frac{f_w}{\ell_w} \int_{-1}^1 P_q(s) \frac{dP_{q'}(s)}{ds} ds = \frac{f_w}{\ell_w} (\mathbf{L}_{\text{SE}})_{q,q'} \quad (5.49)$$

in Verbindung mit dem gemischten Term \mathbf{L}_{SE} . Dabei kompensieren sich die aus der Substitution des Integranden und der Anwendung der Kettenregel bei der Differentiation bezüglich s entstehenden Faktoren. Damit lautet die Darstellung der globalen Matrix

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{L}_\nu^{\text{tv,fese}} = -\mathbf{L}_{\text{SE}} \otimes \mathbf{L}_\nu^{\text{tv},2d}, \quad (5.50)$$

wobei der Faktor f_w/ℓ_w durch die Produktbildung herausfällt. Aufgrund der Eigenschaft des Kroneckerproduktes gegenüber einer Transposition ergibt sich für die globale Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_\nu^{\text{tv,fese}}$ der Ausdruck

$$\mathbf{K}_\nu^{\text{tv,fese}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\text{SE}} \otimes \frac{f_s}{f_w} \mathbf{K}_\nu^{\text{tv},2d,uv} + \mathbf{K}_{\text{SE}} \otimes \frac{f_w}{\ell_w^2 f_s} \mathbf{M}_\nu^{\text{tv},2d,uv} & -\mathbf{L}_{\text{SE}} \otimes \mathbf{L}_\nu^{\text{tv},2d} \\ -(\mathbf{L}_{\text{SE}})^T \otimes (\mathbf{L}_\nu^{\text{tv},2d})^T & \mathbf{M}_{\text{SE}} \otimes \frac{f_s}{f_w} \mathbf{K}_\nu^{\text{tv},2d,w} \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

in Abhängigkeit der zuvor bestimmten Matrixblöcke. Infolge der Eigenschaften des Rotationsoperators ist die Matrix zwar symmetrisch, jedoch singulär. Die zu der Finite-Elemente-Diskretisierung in der Ebene korrespondierenden Blockmatrizen sind dünnbesetzt. Diese Eigenschaft überträgt sich jedoch nur teilweise auf die Gesamtmatrix, da die Spektralblöcke \mathbf{K}_{SE} und \mathbf{L}_{SE} als dichte Matrizen vorliegen. Je nach Sortierung der Matrixelemente

ergibt sich eine dünnbesetzte Verteilung vollbesetzter Blöcke oder ein wiederkehrendes Muster dünnbesetzter Blöcke.

Massenmatrix

Im Fall der Massenmatrix $\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv,fese}}$ innerhalb der diskretisierten Formulierung im Symmetriegebiet in Gleichung (5.40) treten lediglich zwei von Null verschiedene Blöcke auf, da nach Konstruktion die Komponenten der Ansatzfunktionen in der (u, v) -Ebene orthogonal zu der Komponente in w -Richtung sind. Anders als im Fall der Steifigkeitsmatrix müssen somit lediglich die inneren Produkte für die beiden auftretenden Kombinationen separat betrachtet werden und es treten keine gemischten Terme auf.

Die Komponente \mathbf{B}_{11} stellt eine Massenmatrix $\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv,fese,uv}}$ bezüglich der Ansatzfunktionen $\vec{v}^{\text{tv,fese,uv}}$ in der (u, v) -Ebene dar. Durch Einsetzen der Definition in Gleichung (5.34) ergeben sich die Einträge der lokalen Elementmatrizen über das innere Produkt zu

$$(\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv,fese,uv,e}})_{i,j,i',j',q,q'} = \int_{\Omega_s^{uv,e}} \left(\left(\vec{w}_{i,j}^{\text{tv,2d,uv}} P_q \right) \cdot \sigma_{e,uv} \cdot \left(\vec{w}_{i',j'}^{\text{tv,2d,uv}} P_{q'} \right) \right) dV. \quad (5.52)$$

Nach der Separation bezüglich der Komponenten lassen sich die Einträge unter Verwendung der entsprechenden bereits definierten Massenmatrizen aus Gleichung (5.21) und Gleichung (5.30) durch

$$(\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv,fese,uv,e}})_{i,j,i',j',q,q'} = f_s (\mathbf{M}_{\text{SE}})_{q,q'} \frac{1}{f_w} (\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv,2d,uv,e}})_{i,j,i',j'} \quad (5.53)$$

darstellen. Damit ist die globale Massenmatrix bezüglich der Ansatzfunktionen in der (u, v) -Ebene in Tensorproduktschreibweise über

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{M}_\sigma^{\text{tv,fese,uv}} = \mathbf{M}_{\text{SE}} \otimes \frac{f_s}{f_w} \mathbf{M}_\sigma^{\text{tv,2d,uv}} \quad (5.54)$$

gegeben. Als Folge des verwendeten Vorgehens weisen die Einträge des resultierenden Matrixblocks die Einheit des elektrischen Leitwertes (Siemens, A/V) auf. Daher kann der Begriff Admittanzmatrix zur Bezeichnung verwendet werden. Im Rahmen einer transienten Formulierung sorgt die zeitliche Ableitung vor diesem Term für die korrekte Einheit in Verbindung mit der weiter oben beschriebenen Reluktanzmatrix $\mathbf{K}_\nu^{\text{tv,fese}}$.

Ein analoges Vorgehen führt zu dem Matrixblock \mathbf{B}_{22} , der eine Massenmatrix $\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv,fese,w}}$ auf der Basis der Ansatzfunktionen $\vec{v}^{\text{tv,fese,w}}$ in w -Richtung beschreibt. Die zugehörigen Einträge ergeben sich durch Summation der Beiträge der einzelnen Elementmatrizen, die über

$$(\mathbf{M}_\sigma^{\text{tv,fese,w,e}})_{i,i',q,q'} = \int_{\Omega_s^{uv,e}} \sigma_{e,w} \left(\left(w_i^{\text{s,2d}} P_q \right) \left(w_{i'}^{\text{s,2d}} P_{q'} \right) \right) \frac{1}{\ell_w^2} dV \quad (5.55)$$

gegeben sind. Durch eine Veränderung der Reihenfolge der Integration kann wiederum eine Aufteilung in die von Einheiten befreite Matrix \mathbf{M}_{SE} und den verbleibenden Teil mit der Einheit des elektrischen Leitwertes erfolgen. Die in dieser Form angeordneten Einträge der lokalen Elementmatrizen lauten damit

$$(\mathbf{M}_{\sigma}^{\text{tv,fese},w,e})_{i,i',q,q'} = f_s (\mathbf{M}_{\text{SE}})_{q,q'} \frac{1}{f_w} (\mathbf{M}_{\sigma}^{\text{tv,2d},w,e})_{i,i'} . \quad (5.56)$$

Dabei wird die Definition der Massenmatrix in Gleichung (5.19) mit $\xi_{e,w} = \sigma_{e,w}$ verwendet. Für die globale Darstellung kann damit die Form

$$\mathbf{B}_{22} = \mathbf{M}_{\sigma}^{\text{tv,fese},w} = \mathbf{M}_{\text{SE}} \otimes \frac{f_s}{f_w} \mathbf{M}_{\sigma}^{\text{tv,2d},w} \quad (5.57)$$

angegeben werden. Für die gesamte Admittanzmatrix im Symmetrieggebiet ergibt sich unter Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse die blockweise Darstellung gemäß

$$\mathbf{M}_{\sigma}^{\text{tv,fese}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\text{SE}} \otimes \frac{f_s}{f_w} \mathbf{M}_{\sigma}^{\text{tv,2d},w} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{\text{SE}} \otimes \frac{f_s}{f_w} \mathbf{M}_{\sigma}^{\text{tv,2d},w} \end{pmatrix} , \quad (5.58)$$

wobei durch die Orthogonalität der zur Approximation in w -Richtung verwendeten Polynome eine blockdiagonale Struktur gegeben ist. Die Admittanzmatrix ist positiv definit falls im gesamten betrachteten Gebiet keine nicht leitfähigen Gebiete auftreten.

5.2.3 Kopplung auf der Basis von Lagrange-Multiplikatoren

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Methode bietet aufgrund der Restriktion bezüglich der Homogenität der Materialverteilung in einer ausgezeichneten Richtung zunächst nur ein eingeschränktes Anwendungsspektrum. Durch den in Abbildung 5.5 dargestellten geometrischen Ansatz zur Zerlegung des Volumens in entsprechende Untergebiete kann der Einsatzbereich erweitert werden. Somit ist es nicht mehr erforderlich, dass innerhalb des gesamten zu untersuchenden Gebietes entsprechende kontinuierliche Symmetrien vorherrschen. Die Unterteilung des betrachteten Volumens Ω erfolgt nicht überlappend in einen Bereich $\Omega_1 = \Omega_s$, der eine kontinuierliche Symmetrie aufweist, sowie den umgebenden Teil $\Omega_2 = \Omega/\Omega_1$, der über keine nutzbaren Symmetrieeigenschaften verfügt. Auch wenn eine Verallgemeinerung auf das Auftreten mehrerer, nicht zusammenhängender Symmetriebereiche unmittelbar möglich ist, erfolgt aus Gründen der Übersichtlichkeit eine Beschränkung auf einen solchen Bereich, wobei die Art der kontinuierlichen Symmetrie zunächst unerheblich ist. Die weitere Vorgehensweise zur globalen Lösung einer auf einem derartig zerlegbaren Gebiet gegebenen Problemstellung basiert auf der Anwendung unterschiedlicher Diskretisierungsverfahren innerhalb der einzelnen Bereiche. Im Rahmen

dieser Arbeit kommt in dem umgebenden Gebiet Ω_2 eine Diskretisierung mit der Methode der Finiten Elemente niedrigster Ordnung zum Einsatz. Die unter Verwendung der in Abschnitt 3.2 vorgestellten Methoden erhaltene diskrete Darstellung ist allgemein durch

$$\mathbf{A}^{3d} \mathbf{u}^{3d} + \mathbf{g}^{3d} = \mathbf{f}^{3d} \quad (5.59)$$

mit der Systemmatrix \mathbf{A}^{3d} , dem Vektor der Freiheitsgrade \mathbf{u}^{3d} , dem aus dem Randintegral resultierenden Vektor \mathbf{g}^{3d} sowie der rechten Seite \mathbf{f}^{3d} gegeben. Unabhängig davon erfolgt die Diskretisierung des Gebietes Ω_1 unter Verwendung einer geeigneten, an die dort gegebene kontinuierliche Symmetrie angepassten, Methode gemäß Abschnitt 5.2.2. Analog ergibt sich durch

$$\mathbf{A}^{fese} \mathbf{u}^{fese} + \mathbf{g}^{fese} = \mathbf{f}^{fese} \quad (5.60)$$

dieselbe Struktur in Matrixform wie in Gleichung (5.59) bei einer entsprechenden Indizierung der Matrizen und Vektoren. Letztere reflektiert die vorgenommene Kopplung zwischen Finiten Elementen und Spektralelementen (FESE). Das zunächst ungekoppelte System zur Bestimmung des Lösungsvektors \mathbf{u} lautet, unter blockweiser Zusammenfassung von Gleichung (5.59) und Gleichung (5.60),

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{3d} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^{fese} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{3d} \\ \mathbf{u}^{fese} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{g}^{3d} \\ \mathbf{g}^{fese} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{3d} \\ \mathbf{f}^{fese} \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

für das gesamte betrachtete Gebiet Ω . Als Folge der Gebietszerlegung erlaubt dieses System zunächst keine eindeutige Bestimmung der Lösung für die auf der Schnittmenge $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2$ angeordneten Freiheitsgrade der beiden separaten Gebiete Ω_1 und Ω_2 . Für jeden Punkt $P(u, v, w) \in \Gamma$ innerhalb der Schnittmenge existieren zwei im allgemeinen unterschiedliche Lösungen, die aus der unabhängigen Diskretisierung in den beiden Gebieten resultieren. Im Sinne einer physikalisch korrekten Lösung muss durch eine geeignete Kopplung die Eindeutigkeit der Lösung auf der Schnittfläche Γ sichergestellt werden. Dies erfolgt anhand der Stetigkeitsbedingungen für Feld- und Flussgrößen, die aus den Maxwell'schen Gleichungen abgeleitet sind. Dabei müssen zum Zweck einer physikalisch korrekten Darstellung auf diskreter Ebene beide der stets paarweise auftretenden Stetigkeitsbedingungen erfüllt werden. Für die im Rahmen der in dieser Arbeit behandelten quasistatischen Problemstellungen sind die in Abschnitt 2.1 beschriebenen Bedingungen in Tabelle 5.3 zusammengefasst. Abhängig von der Natur der Freiheitsgrade innerhalb der im einzelnen gewählten Formulierung ergibt sich eine unterschiedliche Vorgehensweise bezüglich der Sicherstellung der entsprechenden Kombination von Bedingungen. In allen Fällen wird jedoch eine der beiden Bedingungen explizit durch Gleichsetzen der entsprechenden Freiheitsgrade aus den angrenzenden Gebieten erzwungen und dem System in Gleichung (5.61) in Form weiterer Matrixblöcke hinzugefügt. Dazu werden zunächst über

quasistatische Näherung	Stetigkeitsbedingung an die	
	Feldgröße	Flussgröße
Elektrostatik	$\vec{E}_{3d} \times \vec{n} - \vec{E}_{fese} \times \vec{n} = 0$	$\vec{D}_{3d} \cdot \vec{n} - \vec{D}_{fese} \cdot \vec{n} = 0$
Stationäres Strömungsfeld	$\vec{E}_{3d} \times \vec{n} - \vec{E}_{fese} \times \vec{n} = 0$	$\vec{J}_{3d} \cdot \vec{n} - \vec{J}_{fese} \cdot \vec{n} = 0$
Magnetostatik	$\vec{H}_{3d} \times \vec{n} - \vec{H}_{fese} \times \vec{n} = 0$	$\vec{B}_{3d} \cdot \vec{n} - \vec{B}_{fese} \cdot \vec{n} = 0$

Tabelle 5.3: Übersicht der Stetigkeitsanforderungen am Übergang zwischen den separaten Gebieten Ω_1 und Ω_2 im Fall verschiedener quasistatischer Näherungen. Der Normalenvektor \vec{n} steht senkrecht auf der Schnittfläche und weist aus dem auf herkömmliche Art modellierten Gebiet Ω_2 heraus.

algebraische Selektionsmatrizen \mathbf{Q}_{3d} und \mathbf{Q}_{fese} die relevanten, auf der Schnittfläche Γ befindlichen, Freiheitsgrade aus den jeweiligen Vektoren \mathbf{u}^{3d} beziehungsweise \mathbf{u}^{fese} extrahiert. Dabei muss gegebenenfalls eine Unterscheidung anhand der Art und der Lage der beiden Gebieten gemeinsamen Flächen in den unterschiedlichen Koordinatenrichtungen vorgenommen werden. Die Schnittmenge $\Omega_{int} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ der beiden separaten Gebiete kann gemäß $\Omega_{int} = \Omega_{stirn} \cup \Omega_{seite}$ in zwei Untermengen aufgeteilt werden. Dabei umfasst die Menge Ω_{stirn} den Anteil der gesamten Kopplungsfläche, deren Normalenvektor in Richtung der gegebenen Symmetrie weist. Die verbleibenden Seitenflächen werden in Ω_{seite} zusammengefasst. Im allgemeinen stimmen die Gitter der beiden in Ω_{int} aufeinanderstoßenden Gebiete nicht überein. Während an den Seitenflächen daher grundsätzlich eine Interpolation erforderlich ist, kann diese bei einer geeigneten Wahl der Diskretisierung der Stirnfläche vermieden werden. Im Fall eines zylindrischen Symmetriegebietes existiert jedoch keine Stirnfläche, da es sich nach Konstruktion um ein abgeschlossenes Gebiet handelt, welches ausschließlich über die Seitenflächen mit dem Aussenraum in Verbindung steht. Um eine Durchsetzung der Stetigkeitsbedingung zu erreichen, wird in diesem Fall die Oberflächendiskretisierung, welche die Projektion des Gitters in Ω_2 auf die Schnittfläche Γ darstellt, als Referenz angenommen. Für die zu Ω_1 gehörigen Freiheitsgrade auf der Oberfläche erfolgt eine geeignete geometrische Interpolation basierend auf der Topologie des Symmetriegebietes, welche durch die Interpolationsmatrix \mathbf{B}_{fese} charakterisiert wird. Unter Verwendung dieser Matrixoperatoren kann die Übergangsbedingung zwischen den beiden Gittern durch

$$\mathbf{Q}_{3d} \mathbf{u}^{3d} - \mathbf{B}_{fese} \mathbf{Q}_{fese} \mathbf{u}^{fese} = 0 \quad (5.62)$$

ausgedrückt werden. Zur Berücksichtigung der jeweiligen dualen Stetigkeitsbedingung werden die aus dem Oberflächenintegral der schwachen Formulierung resultierenden Größen, die in dem Vektor \mathbf{g} gesammelt sind, herangezogen. Aufgrund ihrer Definition als zur Berandung gehörige Flussgrößen weisen die beiden Teilvektoren \mathbf{g}^{3d} und \mathbf{g}^{fese} ohnehin nur an

Positionen, die zu Freiheitsgraden auf der Schnittfläche Γ korrespondieren, von Null verschiedene Einträge auf. Die über die Testfunktionen im Rahmen des Galerkin-Verfahrens gewichteten Größen werden durch eine geeignete Diskretisierung über die mit der Schnittfläche assoziierten Freiheitsgrade \mathbf{m}_{3d} ausgedrückt. Dabei bezeichnet die Indizierung die willkürliche Wahl der Zuordnung der zusätzlichen Freiheitsgrade auf der Schnittfläche zu dem unter Verwendung herkömmlicher dreidimensionaler Ansatzfunktionen diskretisierten Gebiet Ω_2 . Somit gilt die Darstellung

$$\mathbf{g}^{3d} = \mathbf{Q}_{3d}^H \mathbf{m}_{3d} , \quad (5.63)$$

$$\mathbf{g}^{fese} = -\mathbf{Q}_{fese}^H \mathbf{B}_{fese}^H \mathbf{m}_{3d} . \quad (5.64)$$

Auf diese Weise führt die Berücksichtigung der beiden, innerhalb der gewählten Formulierung relevanten, Stetigkeitsbedingungen zu dem gekoppelten System

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{3d} & 0 & \mathbf{Q}_{3d}^H \\ 0 & \mathbf{A}^{fese} & -\mathbf{Q}_{fese}^H \mathbf{B}_{fese}^H \\ \mathbf{Q}_{3d} & -\mathbf{B}_{fese} \mathbf{Q}_{fese} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{3d} \\ \mathbf{u}^{fese} \\ \mathbf{m}_{3d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{3d} \\ \mathbf{f}^{fese} \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (5.65)$$

das bei der beschriebenen Vorgehensweise zwar symmetrisch, jedoch durch die entstehende Sattelpunktformulierung indefinit ist. Die an dieser Stelle beschriebene Vorgehensweise ist sehr allgemein gehalten und damit auf eine Vielzahl an Problemstellungen anwendbar. Unter bestimmten Voraussetzungen, insbesondere bei angepassten Gittern auf der Schnittfläche, vereinfacht sich die Darstellung durch den Wegfall der Notwendigkeit zur Interpolation. Weitere, für die verschiedenen Formulierungen spezifische Einzelheiten der Kopplung werden im Rahmen der Vorstellung ausgewählter Beispiele im folgenden Abschnitt behandelt.

5.3 Anwendungsbeispiele im Rahmen der numerischen Feldsimulation

Das allgemein hergeleitete hybride Diskretisierungsverfahren unter besonderer Berücksichtigung von innerhalb der betrachteten Struktur vorhandenen kontinuierlichen Symmetrien wird im folgenden auf zwei praxisrelevante Beispiele angewandt. In der vorgestellten Form ist das Verfahren nicht explizit an bestimmte Formulierungen gebunden und somit immer dann einsetzbar, wenn die aufgeführten Anforderungen an gegebene Symmetriebereiche erfüllt sind. Da sich für unterschiedliche Formulierungen je nach Art der kontinuierlichen Symmetrie signifikante Unterschiede im Detail, insbesondere bei der Kopplung der separat

diskretisierten Gebiete ergeben, wurde deren Behandlung in die folgenden Abschnitte eingegliedert. Dies erlaubt eine anschauliche Spezialisierung der gekoppelten Diskretisierung anhand der gewählten Anwendungsbeispiele.

5.3.1 Isolationsverhalten eines Hochspannungstransformators

Bei der Übertragung elektrischer Energie mithilfe von Freileitungen über sehr große Distanzen im Bereich einiger 100 km bis 1000 km stellt die sogenannte Hochspannungs-Gleichstrom-Übertragung (HGÜ) eine Alternative zur herkömmlichen Wechselstromübertragung dar. Zur Übertragung der elektrischen Energie wird die von Generatoren auf Mittelspannungsniveau erzeugte Drehstromenergie über Transformatoren auf die zur Übertragung vorgesehene Spannung im Bereich einiger 100 kV gebracht und anschließend gleichgerichtet. Aufgrund gesetzlicher Bestimmungen müssen vor der Inbetriebnahme verschiedene Prüfungen an dem Transformator durchgeführt werden. Diese umfassen beispielsweise die Festigkeit gegenüber Spannungsspitzen (engl. „*surges*“) bedingt durch Schaltvorgänge oder Blitzeinschläge. Weiterhin muss das Verhalten im Fall einer Fehlfunktion innerhalb des Gleichrichters, die zum Anliegen einer Gleichspannung auf dem Übertragungsniveau an der Sekundärwicklung führt, untersucht werden. Bei derartigen Prüfungen wird eine Spannung von bis zu 1 MV angelegt. Im Fall eines unerwünschten Durchschlags in der Isolation kommt es in den meisten Fällen zu einer Zerstörung des Transformators. Da die Geräte sehr teuer sind, bieten im Vorfeld durchgeführte numerische Simulationen eine Möglichkeit zur Reduzierung der Anzahl potentiell zu Durchschlägen führender Prüfungen. Im folgenden wird das hybride Diskretisierungsverfahren zur Simulation des Isolationsverhaltens des in Abbildung 5.8(a) dargestellten Transformators unter den beschriebenen Gleichspannungs-Prüfbedingungen eingesetzt. Abbildung 5.8(b) zeigt ein entsprechendes CAD-Modell des Transformatorkerns wobei der umgebende Metalltank sowie die Hochspannungsdurchführungen und -ableiter nicht dargestellt sind. Es handelt sich um einen einphasigen Transformator, der aus zwei parallel geschalteten Wicklungen aufgebaut ist, um die Belastung zu reduzieren. Die bei der Gleichspannungsprüfung auftretenden Effekte können in einer ersten Näherung durch ein stationäres Strömungsfeld gemäß Gleichung (2.39) unter Verwendung des elektrischen Skalarpotentials ϕ beschrieben werden. Im Rahmen der numerischen Lösung auf der Basis des gekoppelten Diskretisierungsverfahrens wird der den Transformatorkern in definiertem Abstand umgebende Metalltank als ideal elektrisch leitend modelliert. Dies kann in Form einer homogenen Dirichlet-Randbedingung über die zugehörigen Freiheitsgrade der Approximation des elektrischen Skalarpotentials erfolgen. Der auf diese Weise in der Simulation berücksichtigte Transformatortank ist zu Kühlungs- und Isolationszwecken mit speziellem Öl gefüllt, welches eine Leitfähigkeit im

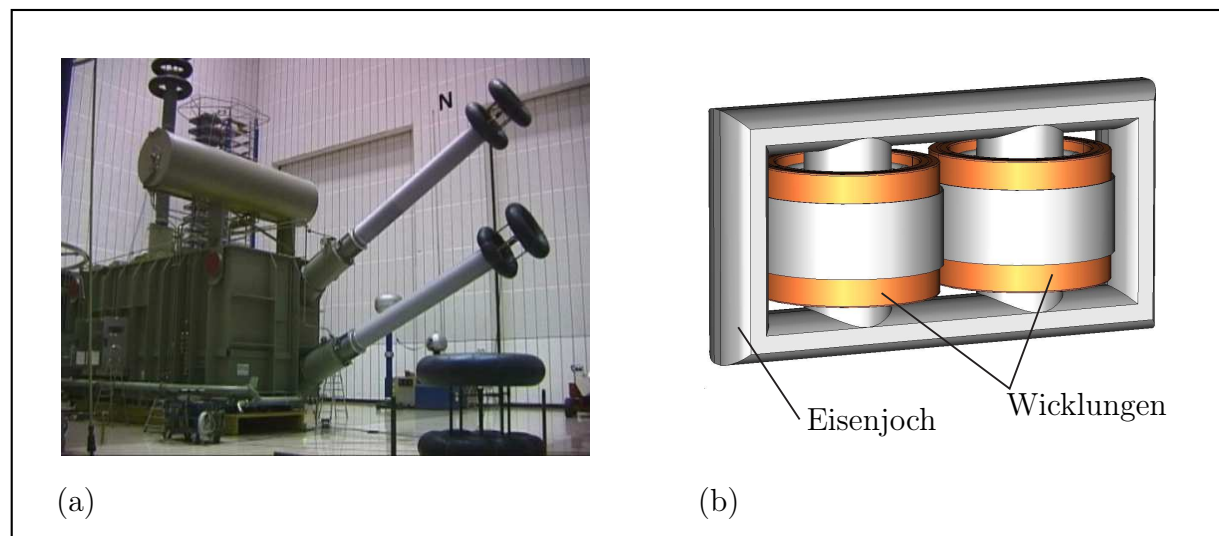


Abbildung 5.8: (a) Einphasiger HGÜ-Transformator (283.7 MVA Yy) der Siemens AG in einer Testumgebung (Bildquelle: Siemens AG [179]); (b) CAD-Modell des Transformators mit zwei parallelen Wicklungen ohne Hochspannungsdurchführung und Ableiter unter Ausblendung des umgebenden Metalltanks.

Bereich zwischen $\sigma = 1 \cdot 10^{-12} \text{ S/m}$ und $\sigma = 1 \cdot 10^{-16} \text{ S/m}$ aufweist [180]. Abbildung 5.9(a) zeigt nochmals den für die numerischen Simulationen verwendeten Aufbau des im Tank eingebetteten Transformator-kerns. Dieser besteht aus einem Eisenjoch mit vier Schenkeln, wobei die jeweils konzentrisch angeordneten Primär- und Sekundärwicklungen die beiden mittleren Schenkel umgeben. Deren Aufbau ist in der vergrößerten Ansicht eines Ausschnitts in Abbildung 5.9(b) dargestellt. Die innere Wicklung stellt im regulären Betrieb die Primärseite des Transformators dar. Für die in diesem Kontext durchgeführten Simulationen wird diese, wie auch das Joch mit den Schenkeln, in Form eines ideal elektrisch leitfähigen Materials modelliert. Dadurch können die zugehörigen Bereiche von der Simulation ausgenommen werden, wobei die genannte Eigenschaft über die Durchsetzung einer homogenen Dirichlet-Randbedingung auf den korrespondierenden Oberflächen abgebildet wird. Demgegenüber wird im Rahmen der Gleichspannungsprüfung die Sekundärwicklung, welche ebenfalls als ideal elektrisch leitfähig modelliert wird, mit dem Prüfpotential beaufschlagt. Dies erfolgt im Rahmen des numerischen Modells über eine inhomogene Dirichlet-Randbedingung. Zur Verringerung des Risikos eines elektrischen Durchschlags zwischen der Sekundärwicklung und den übrigen, auf Erdpotential befindlichen Teilen, sind mehrere dünne Papierschichten mit Isolationswirkung in geringem Abstand zu der Wicklung angeordnet. Die Leitfähigkeit dieses Papiermaterials liegt etwa um den Faktor 50 unter dem entsprechenden Wert für das umgebende Öl. Zur weiteren Absicherung gegen einen Spannungsdurchschlag auf das von außen zugängliche metallische Gehäuse ist ein

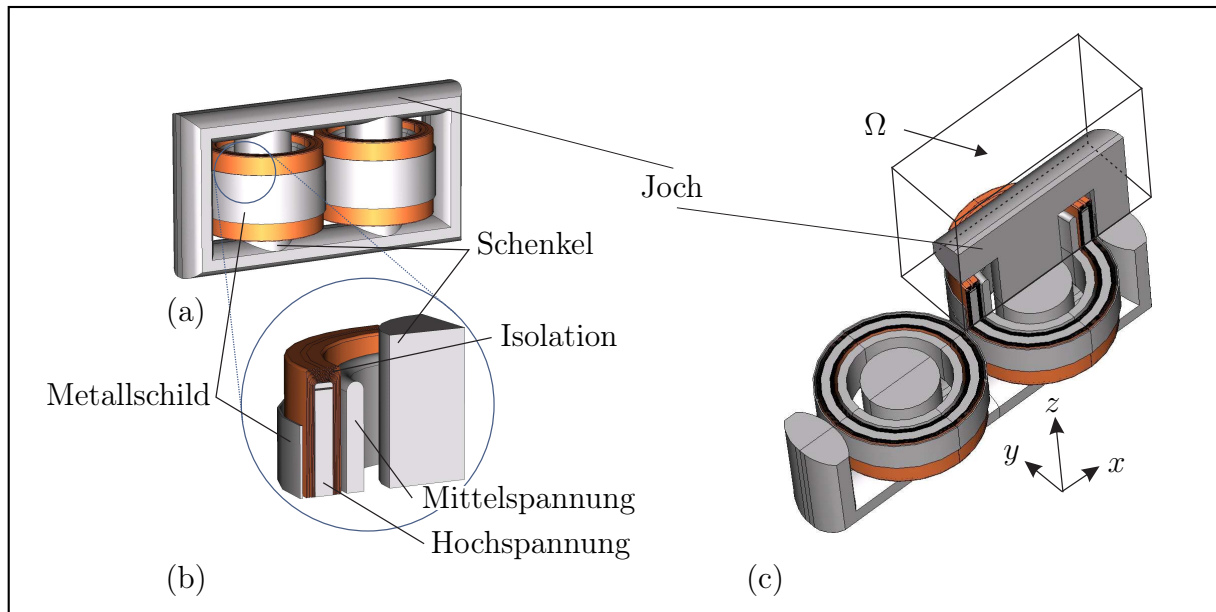


Abbildung 5.9: (a) Dreidimensionales Modell des Transformators; (b) vergrößerte Darstellung eines Sektors des zylindrischen Bereiches, welcher die Wicklungen sowie Isolationsschichten beinhaltet; (c) Zu betrachtendes, auf ein Achtel der gesamten Struktur reduziertes Gebiet Ω nach der Anwendung dreier kartesischer Spiegelsymmetrien.

zusätzlicher geerdeter Metallring außerhalb der Papierisolation vorgesehen. Die dreifache Anwendung diskreter Spiegelsymmetrien führt zu dem auf ein Achtel reduzierten Gebiet Ω in Abbildung 5.9(c), welches zur vollständigen Modellierung der interessierenden Effekte aus Symmetriegründen ausreichend ist. Während die Randbedingung in den Ebenen bei $x = x_{\max}$, $y = y_{\max}$ und $z = z_{\max}$ durch die Wand des Transformatortanks vorgegeben ist, kommen in den übrigen drei Ebenen Neumann-Randbedingungen zur Modellierung der Spiegelsymmetrie zum Einsatz.

Hybride Diskretisierung bei partieller Rotationssymmetrie

Aufgrund des Längenverhältnisses zwischen der Dicke der Papierisolation und der Gesamtgröße des Transformators von etwa 1 : 1000 ist die Erzeugung einer Volumendiskretisierung auch für das auf ein Achtel reduzierte Modell sehr aufwendig und führt in jedem Fall zu einer sehr großen Anzahl von Freiheitsgraden im Bereich mehrerer Millionen. Insbesondere die zylindrischen Isolationsschichten mit einem im Verhältnis zu ihrer Dicke sehr großen Radius stellen eine Schwierigkeit dar und können gegebenenfalls der Erstellung eines gültigen Gitters im Weg stehen. In diesem Fall verspricht die Anwendung des beschriebenen gekoppelten Diskretisierungsverfahrens eine effizientere und genauere Modellierung bei verringertem numerischen Aufwand. Es erfolgt eine Zerlegung in zwei getrennte Bereiche: Dabei

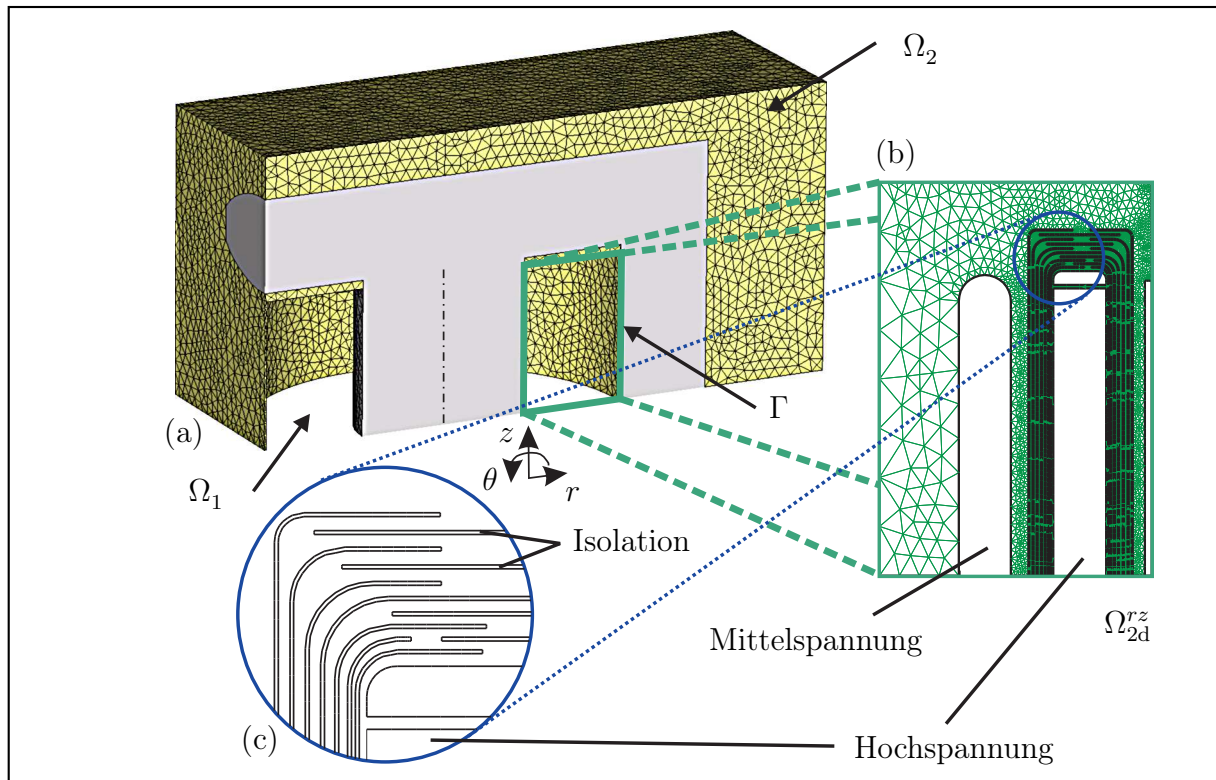


Abbildung 5.10: (a) Diskretisierung des umgebenden Gebietes Ω_2 bestehend aus Tetraedern; (b) Triangulierung des zweidimensionalen Querschnitts Ω_{2d}^{rz} des rotationssymmetrischen Gebietes Ω_1 ; (c) vergrößerte Darstellung der dünnen zylindrischen Isolationsschichten in der Ebene.

beinhaltet der in Abbildung 5.10(a) dargestellte Bereich Ω_2 keine nutzbaren Symmetrien. Dieser besteht im wesentlichen aus dem äußeren Teil des mit Öl gefüllten quaderförmigen Transformatortanks sowie den Jochteilen. Der verbleibende Bereich Ω_1 enthält alle Modellteile, welche eine kontinuierliche Rotationssymmetrie aufweisen und in der Folge über eine Triangulierung der Querschnittsebene beschrieben werden können. Eine solche ist in Abbildung 5.10(b) dargestellt und wurde unter Verwendung einer energiebasierten adaptiven Gitterverfeinerung erzeugt. Bei der zweidimensionalen Betrachtung stellt die räumliche Auflösung der vergrößert in Abbildung 5.10(c) dargestellten dünnen Isolationsschichten keine Schwierigkeit dar. Die Tatsache, dass gerade diese feinen Details innerhalb des ausgedehnten Transformators auf diese Weise modelliert werden können, trägt wesentlich zu der gegenüber herkömmlichen Verfahren gesteigerten Effizienz der hybriden Diskretisierungsmethode bei. Wie in Abschnitt 5.2.3 beschrieben, erfolgt eine separate

Diskretisierung des elektrischen Skalarpotentials innerhalb der schwachen Formulierung

$$\int_V \left(\sigma \nabla \phi \cdot \nabla w_{i',q'}^{s,[3d,fese]} \right) dV - \int_{\partial V} \left(J_n w_{i',q'}^{s,[3d,fese]} \right) dA = 0 \quad (5.66)$$

in den beiden Gebieten. Zu diesem Zweck kommen in Ω_2 herkömmliche skalare Ansatzfunktionen $w_i^{s,3d}$ und in Ω_1 die in Gleichung (5.23) definierten hybriden Ansatzfunktionen $v_{i,q}^{s,fese}$ zum Einsatz. Damit sind die zu dem umgebenden dreidimensionalen Bereich Ω_2 korrespondierenden elementweisen Beiträge durch

$$(\mathbf{K}_\sigma^{s,3d,e})_{i,i'} = \int_{\Omega_{2,e}^e} \left(\nabla w_i^{s,3d} \cdot \sigma_e \cdot \nabla w_{i'}^{s,3d} \right) dV, \quad (5.67)$$

$$(\mathbf{g}_\sigma^{s,3d,e})_{i'} = \int_{\partial\Omega_{2,e}^e \cap \partial\Omega_2} \left(J_n w_{i'}^{s,3d} \right) dA, \quad (5.68)$$

gegeben. Die zugehörigen globalen Größen entstehen durch eine Summation über alle Elemente e analog zu Gleichung (3.103) und Gleichung (3.104). Damit gilt $\mathbf{A}^{3d} = \mathbf{K}_\sigma^{s,3d}$ sowie $\mathbf{g}^{3d} = \mathbf{g}_\sigma^{s,3d}$.

Aufgrund der gegebenen Periodizität werden, wie in Abschnitt 3.3.3 erläutert, im Gebiet Ω_1 harmonische Funktionen P_q zur Approximation des elektrischen Skalarpotentials in Richtung der Koordinate $w = \phi$ eingesetzt. Dabei gehören die harmonischen Koeffizienten q_n zu der Menge $\mathcal{Q} = \{q_0, \dots, q_N\}$ berücksichtigter Ordnungen. Somit lautet der Koeffizient \mathbf{A}^{fese} der Blockmatrix des ungekoppelten Systems in Gleichung (5.61) für diesen Fall

$$\mathbf{A}^{fese} = \mathbf{K}_\sigma^{s,fese} = \mathbf{M}_{SE}^F \otimes \frac{1}{2} \mathbf{K}_\sigma^{s,2d} + \mathbf{K}_{SE}^F \otimes \frac{1}{2\pi^2 r^2} \mathbf{M}_\sigma^{s,2d}. \quad (5.69)$$

Dabei werden die Steifigkeits- und Massenmatrizen für eine zweidimensionale achsensymmetrische Modellierung aus Gleichung (5.12) beziehungsweise Gleichung (5.16) verwendet. Da die in ϕ -Richtung eingesetzten Funktionen gleichzeitig Eigenfunktionen der zugrundeliegenden Differentialgleichung darstellen, erfolgt nicht nur eine Entkopplung der spektralen Koeffizienten bei der Bildung der Massenmatrix \mathbf{M}_{SE}^F , sondern auch im Fall der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{SE}^F . Somit entsteht eine blockdiagonale Gestalt für \mathbf{A}^{fese} . Für den aus dem Randintegral der schwachen Formulierung resultierenden Term ergibt sich

$$(\mathbf{g}_\sigma^{s,fese,e})_{i',q'} = \int_{\partial\Omega_{1,e}^e \cap \partial\Omega_1} \left(J_n v_{i',q'}^{s,fese} \right) dA \quad (5.70)$$

analog zu Gleichung (5.68). Dabei wird der Eintrag \mathbf{g}^{fese} in Gleichung (5.61) durch eine Summation über alle beteiligten Elemente bestimmt.

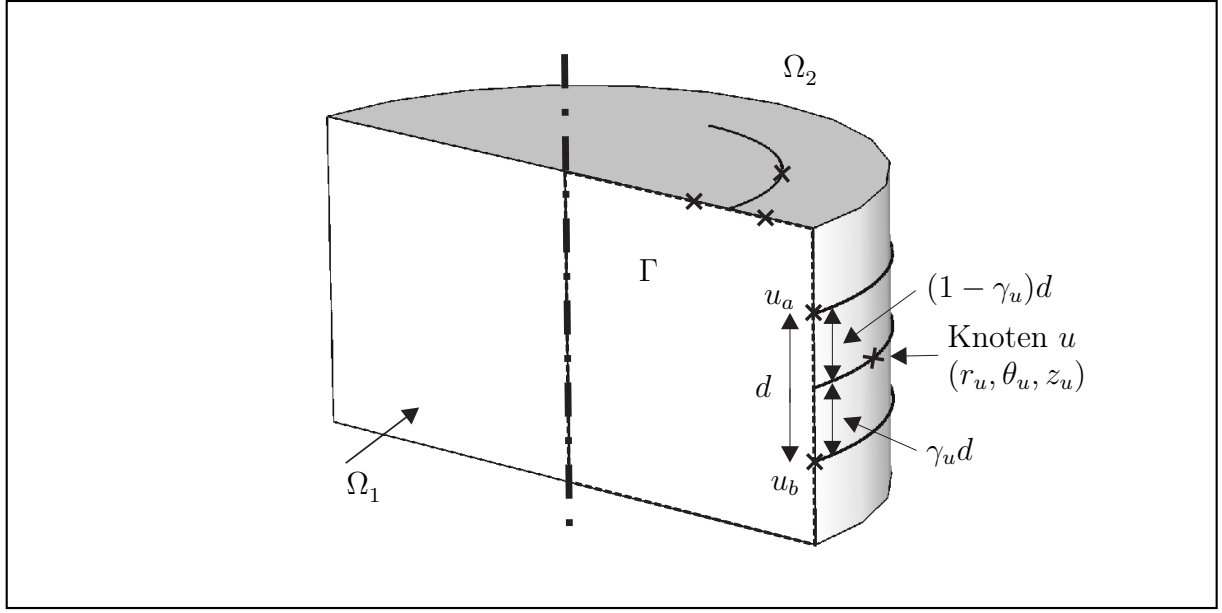


Abbildung 5.11: Interpolation auf der Zylinderoberfläche $\Omega_1 \cap \Omega_2$: Linear in der Querschnittsebene sowie trigonometrisch in azimuthaler Richtung.

Kopplung der Gebiete im Fall einer skalaren Formulierung

Im vorliegenden Fall der Einbettung eines zylindrischen Gebietes, welches eine feine Triangulierung zur Auflösung geometrischer Details aufweist, ist die Konstruktion eines übereinstimmenden Gitters auf beiden Seiten der Schnittfläche nicht angebracht. Dabei ginge der durch die hohe räumliche Auflösung in zwei Dimensionen erzielte Vorteil bezüglich der Anzahl an Freiheitsgraden teilweise verloren, da zumindest in der Umgebung der Schnittfläche ein ähnlich feines Gitter in drei Dimensionen zu konstruieren wäre. Um eine Kopplung der Freiheitsgrade gemäß Gleichung (5.62) zu erreichen, ist daher eine Interpolation erforderlich. Aufgrund der höheren räumlichen Auflösung im Symmetrieggebiet Ω_1 erfolgt die Interpolation von diesem ausgehend in Richtung der im vollständig dreidimensional diskretisierten Gebiet Ω_2 angesiedelten Gitterpunkte [181]. Anhand des in Abbildung 5.11 dargestellten Halbzylinders wird die verwendete Vorgehensweise illustriert. Dabei wird zwischen der Mantelfläche Γ_m sowie der Vereinigungsmenge der beiden Deckflächen Γ_d unterschieden. Im Fall der Mantelfläche erfolgt eine lineare Interpolation auf der Schnittfläche Γ , die auf natürliche Weise durch die Ansatzfunktionen in der Ebene gegeben ist. Unter der bereits erwähnten Voraussetzung einer hinreichend feinen räumlichen Auflösung von Γ liegt ein Gitterpunkt $P_u^{3d}(x_u, y_u, z_u) = P_u^{3d}(r_u, \phi_u, z_u)$ aus $\Omega_1 \cap \Omega_2$ bezüglich seiner (x, z) -Koordinate stets zwischen zwei Knotenpunkten u_a und u_b in der Ebene der Triangulierung. Der Abstand $d = u_{a,z} - u_{b,z}$ definiert somit die Koeffizienten γ_u und $1 - \gamma_u$ der Interpolation in der (r, z) -Ebene. Auf diese Weise können in Verbindung mit einer trigono-

metrischen Interpolation in der verbleibenden ϕ -Richtung die Knotenpotentiale über die Vorschrift

$$\phi_{3d,u} = \sum_{q \in \mathcal{Q}} e^{-jq\theta_u} (\gamma_u \phi_{fese,u_a,q} + (1 - \gamma_u) \phi_{fese,u_b,q}) \quad (5.71)$$

bestimmt werden. Für die Deckflächen Γ_d wird dasselbe Verfahren angewandt mit dem Unterschied, dass die zur Interpolation relevanten Gitterknoten in der zweidimensionalen Ebene nun stets bei $z = z_{\max}$ liegen. Somit ist Gleichung (5.71) auch in diesem Fall anwendbar. Die Interpolationskoeffizienten γ_u , $(1 - \gamma_u)$ sowie $e^{-jq\theta_u}$ werden entsprechend ihrer Indizierung in den Matrizen \mathbf{B}_q^{fese} angeordnet, so dass über $\mathbf{B}^{fese} = (\mathbf{B}_0^{fese}, \dots, \mathbf{B}_N^{fese})$ der entsprechende Matrixblock in Gleichung (5.62) gegeben ist.

Die Diskretisierung der normalen Komponenten der elektrischen Stromdichte in Gleichung (5.68) beziehungsweise Gleichung (5.70) erfolgt unter Verwendung einer Kollokationsmethode. Durch die Approximation über Diracsche Deltaimpulse sind die Freiheitsgrade \mathbf{m}_{3d} durch die jeweilige über die Dreiecksfläche entlang der Schnittfläche integrierte Stromdichte gegeben und besitzen somit die Einheit Ampère des elektrischen Stromes. Diese Übergangsströme weisen in den beiden Gebieten eine entgegengesetzte Richtung auf und kompensieren sich punktweise an den Gitterknoten auf der Oberfläche $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Auf diese Weise können die Vektoren \mathbf{g} in das gekoppelte Gesamtsystem gemäß Gleichung (5.65) aufgenommen werden, so dass die duale Übergangsbedingung gemäß Tabelle 5.3 ebenfalls erfüllt ist. Für diesen Fall ergibt sich damit das blockdiagonale System

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_\sigma^{s,3d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{3d}^H \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\sigma,0}^{s,fese} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_{fese}^H \mathbf{B}_{q_1}^H \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}_{\sigma,N}^{s,fese} & -\mathbf{Q}_{fese}^H \mathbf{B}_{q_N}^H \\ \mathbf{Q}_{3d} & -\mathbf{B}_{q_1} \mathbf{Q}_{fese} & \dots & -\mathbf{B}_{q_N} \mathbf{Q}_{fese} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{3d} \\ \mathbf{u}_{cyl,\lambda_1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{fese,\lambda_m} \\ \mathbf{m}_{3d} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.72)$$

welches aufgrund der in allen Bereichen von Null verschiedenen Leitfähigkeit sowie der Eigenschaften des zugrundeliegenden Differentialoperators regulär ist. Der Einsatz der Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{m}_{3d} zum Zweck der Kopplung führt jedoch zu einer Sattelpunktformulierung, so dass zur Lösung des System eine herkömmliche Variante der LU-Zerlegung verwendet wird. Dies stellt bei der zu erwartenden Systemgröße im Hinblick auf den zur Verfügung stehenden Arbeitsspeicher bei der numerischen Lösung auf einer 64-Bit-Plattform keine wesentliche Einschränkung dar. Im Gegenteil kann auf diese Weise mitunter eine kurze Simulationsdauer erreicht werden.

Auswertung der Potentialverteilung in verschiedenen Bereichen

Der Einsatz des gekoppelten Diskretisierungsverfahrens liefert eine Lösung für das elektrische Skalarpotential in einem HGÜ-Transformator unter Prüfbedingungen. Im Gegensatz

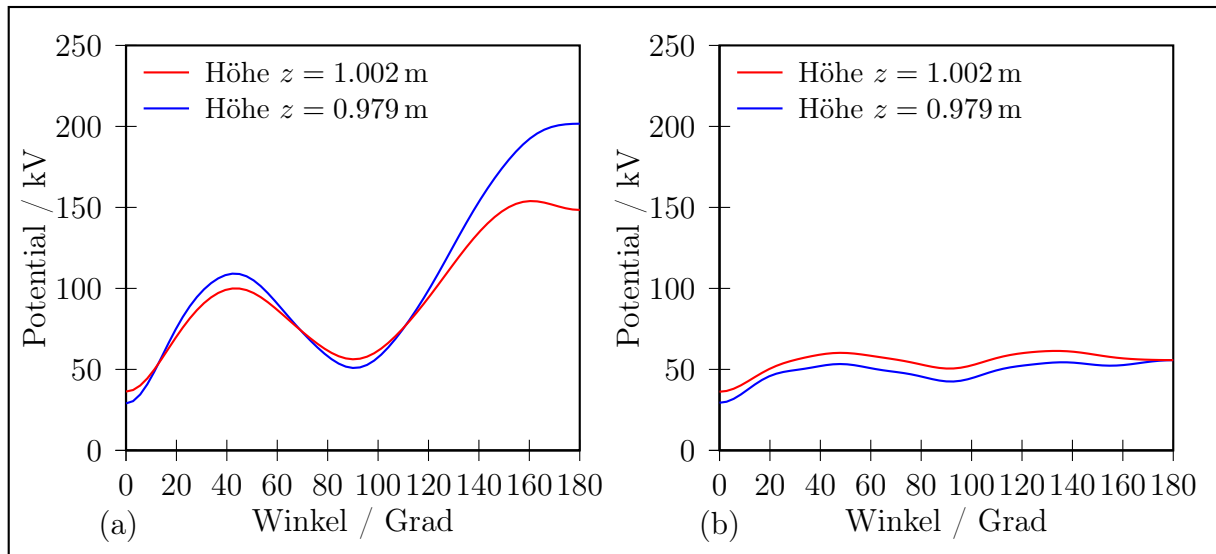


Abbildung 5.12: Auswertung des elektrischen Skalarpotentials entlang der radial äußeren Isolationsschicht in azimuthaler Richtung an zwei unterschiedlichen Positionen bezüglich der Höhe z : (a) ohne zusätzlichen Metallring; (b) mit einem Ring auf Erdpotential bis zu einer Höhe von 0.858 m.

zu einer herkömmlichen Volumendiskretisierung stellt die Gittergenerierung bei diesem Verfahren keine größere Herausforderung dar. Zudem erfolgt durch die Verwendung eines zylindrischen Koordinatensystems eine exakte Abbildung der Geometrie im numerischen Modell in azimuthaler Richtung. Dies ermöglicht eine Auswertung der Lösung in dieser Richtung ohne gitterbedingte Verzerrungen. Abbildung 5.12(a) zeigt eine solche Auswertung der berechneten Lösung für das elektrische Skalarpotential entlang der ϕ -Richtung für einen Aufbau ohne das zur weiteren Absicherung gegen Durchschläge vorgesehene Metallschild. Dabei wird als radiale Auswertungsposition die Oberfläche der am weitesten außen liegenden Isolationsschicht aus Papier gewählt. Während bei $\phi = 0$ dennoch eine gute Abschirmung durch das ebenfalls auf Erdpotential befindliche Joch erfolgt, wächst das Potential ab $\phi = 90^\circ$ auf mehr als den vierfachen Wert bei $\phi = 180^\circ$ an. Dabei ist der Zuwachs nahe am Mittelpunkt des Transformators geringfügig höher. Der direkte Vergleich mit der in Abbildung 5.12(b) dargestellten Konfiguration mit zusätzlichem Metallring zeigt eine deutliche Auswirkung der Präsenz einer solchen konstruktiven Maßnahme [180]. Dabei ist nicht nur entscheidend, dass der Absolutwert des berechneten Potentials über den gesamten Winkelbereich geringer ist. Vielmehr sorgt der Metallring auch für einen gleichmäßigen Verlauf in azimuthaler Richtung. Somit ist auch die für Durchschläge verantwortliche Komponente der elektrischen Feldstärke wesentlich kleiner. Während sich die bisherigen Betrachtungen auf die Oberfläche des Isolationsmaterials bezogen, zeigt Abbildung 5.13 die Verteilung des elektrischen Skalarpotentials in einem Querschnitt an

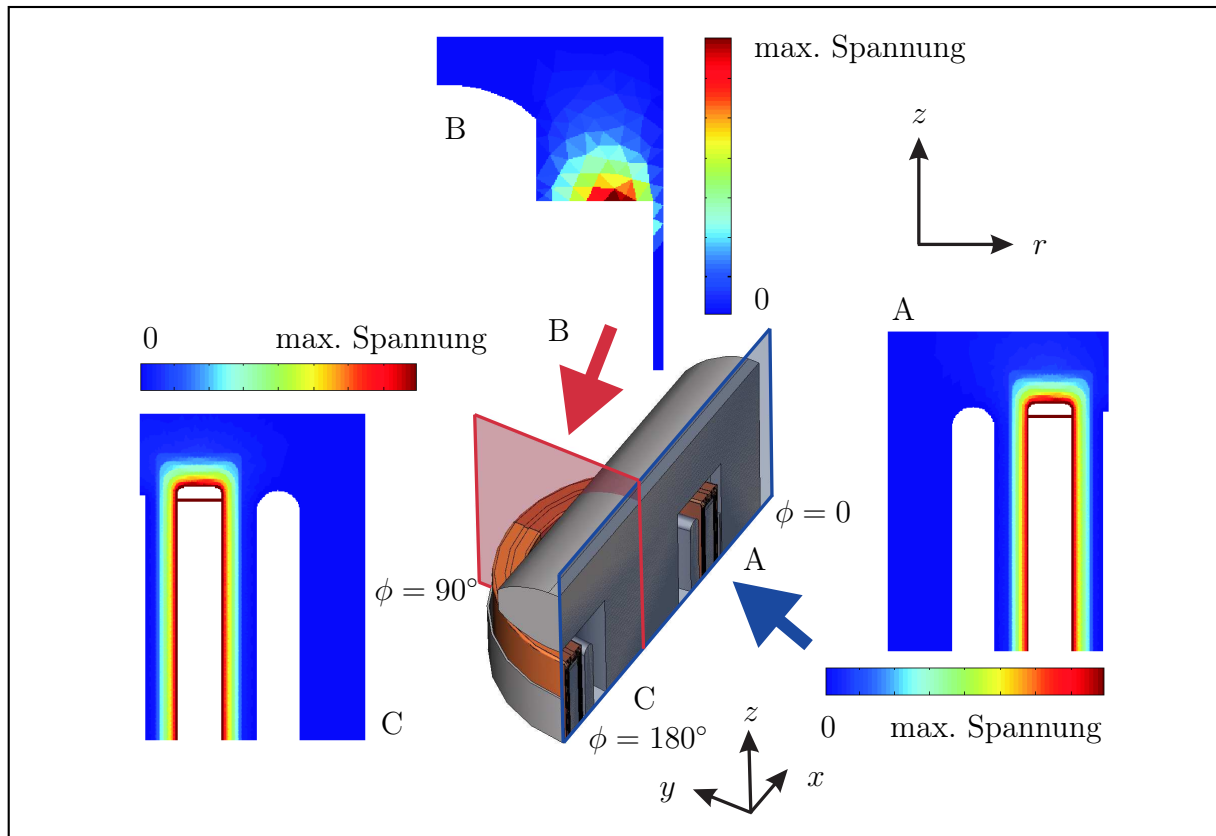


Abbildung 5.13: Auswertung des elektrischen Skalarpotentials innerhalb der (r, z) -Ebene an unterschiedlichen Winkelpositionen. Ansicht A: In unmittelbarer Nähe des Schenkels sowie des Jochs ($\phi = 0$), Ansicht B: Größte Entfernung zu geerdeten Bauteilen, abgesehen von der Berandung durch den Transformatortank ($\phi = 90^\circ$), Ansicht C: Unmittelbare Nähe zur parallel geschalteten zweiten Wicklung ($\phi = 180^\circ$).

drei verschiedenen Winkelpositionen. Im Gegensatz zu einer reinen achsensymmetrischen Modellierung stimmt die Verteilung des elektrischen Skalarpotentials in den dargestellten Schnittebenen nicht überein. Dies ist ein Zeichen für die korrekte Modellierung des Einflusses der rechteckigen Berandung durch den Transformatortank sowie der geerdeten Jochteile auf die Lösung im Symmetriebereich. Ansicht B verdeutlicht, dass sich die Potentialverteilung über der Wicklung im Bereich außerhalb des Jochs weiter in den mit Öl gefüllten Tank hinein erstreckt. Der Vergleich der Ansichten A und C liefert eine Bestätigung der zuvor getroffenen Beobachtung über die Wirksamkeit des Metallrings bezüglich der erwünschten Beeinflussung der statischen Feldverteilung unter Prüfbedingungen.

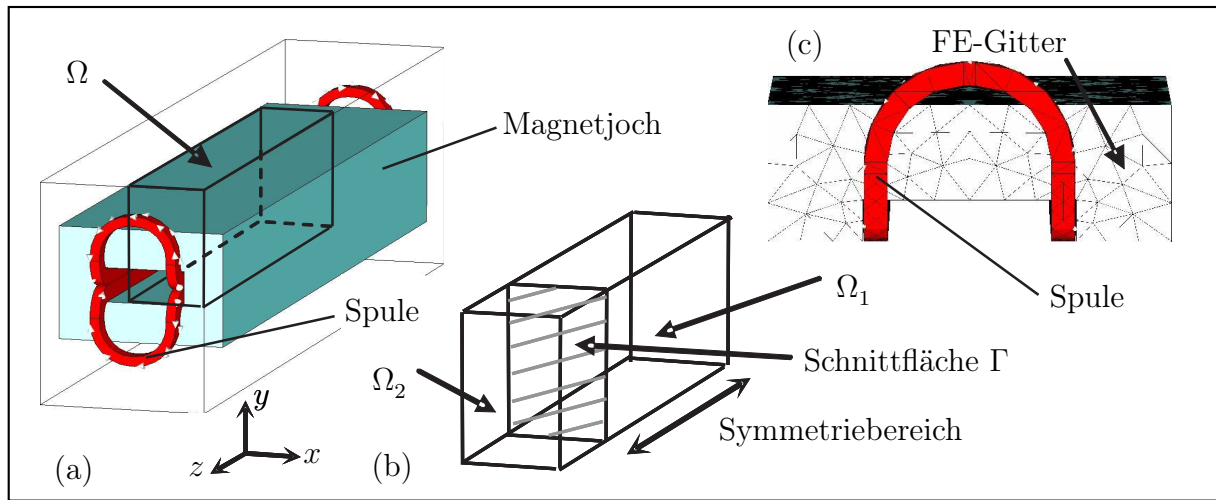


Abbildung 5.14: (a) Modell des SIS-100-Magneten mit dem zu betrachtenden Teilbereich Ω ; (b) Gebietszerlegung in den Symmetriebereich Ω_1 sowie den verbleibenden Teil Ω_2 ; (c) Triangulierung der Schnittfläche Γ über die Projektion der dreidimensionalen Diskretisierung aus Ω_2 .

5.3.2 Magnetostatische Simulationen am Beispiel des SIS-100-Magneten

Der in Kapitel 4 ausführlich diskutierte supraleitende Dipolmagnet, der für den Einsatz im Synchrotron SIS-100 vorgesehen ist, stellt aufgrund seiner Größe im Vergleich zur Längenskala der zu erwartenden räumlichen Änderung der elektromagnetischen Felder eine Herausforderung für herkömmliche volumenbasierte Diskretisierungsverfahren dar. In diesem Fall kann der Einsatz des vorgestellten gekoppelten Verfahrens durch die spezielle Berücksichtigung der auch in dieser Struktur vorhandenen partiellen räumlichen Symmetrie vorteilhaft sein. Zur Beschreibung der magnetischen Feld- und Flussgrößen im Rahmen der magnetostatischen Näherung besteht unter anderem die Wahl zwischen dem magnetischen Skalarpotential und dem magnetischen Vektorpotential. Für beide Fälle kann gemäß Abschnitt 5.2.2 eine hybride Diskretisierung angegeben werden. Die kontinuierliche Symmetrie, aus der die Motivation zum Einsatz des gekoppelten Verfahrens resultiert, drückt sich in einer Translationsinvarianz des Magnetquerschnitts über einen langen Bereich in der Mitte des Magneten aus. Der zu erwartende Vorteil bezüglich der Reduktion der Größe des numerischen Modells ist umso höher, je länger der Symmetriebereich ausfällt.

Modellierung über eine Gebietszerlegung

In Abbildung 5.14(a) ist der über die Anwendung dreier diskreter Spiegelsymmetrien auf ein Achtel verkleinerte zu betrachtende Bereich Ω des SIS-100-Magneten dargestellt. Der

das Magnetjoch umfassende Bereich zeichnet sich durch eine translatorische Invarianz bezüglich der z -Richtung aus. Weiterhin ist der durch eine homogene Stromverteilung auf einem rechteckigen Querschnitt modellierte Strom in diesem Bereich ebenfalls konstant. Dreidimensionale Effekte treten nur in den beiden Endbereichen durch die Krümmung der Spule sowie die Randbedingung zum Abschluss des Rechengebietes in z -Richtung auf. Im weiteren erfolgt eine Gebietszerlegung unter Berücksichtigung der erwähnten Symmetrieeigenschaften. Darüber ergibt sich die in Abbildung 5.14(b) schematisch gezeigte Aufteilung. Das Gebiet Ω_1 umfasst das im Fall der betrachteten vereinfachten Struktur vollständig längshomogene Magnetjoch sowie den Anteil der in selbigem verlaufenden Spule. Demgegenüber wird der Endbereich mit der gekrümmten Spulengeometrie sowie der verbleibende Raum bis zum Abschluss des Rechengebietes im Volumen Ω_2 zusammengefasst. In diesem Bereich erfolgt eine Volumendiskretisierung unter Verwendung von Tetraedern. Im Gegensatz zum Beispiel eines Transformators in Abschnitt 5.3.1 ist in diesem Fall keine Kopplung über die Seitenflächen des Symmetrigebietes notwendig. Weiterhin kann die Kopplung über die Stirnfläche durch die Wahl einer geeigneten Diskretisierung einfach gestaltet werden. Die Projektion der Volumendiskretisierung in Ω_2 auf die Schnittfläche Γ in Abbildung 5.14(c) beschreibt eine Triangulierung derselben und wird als Basis der hybriden Diskretisierung in Ω_1 verwendet. In diesem Fall ist keine Interpolation der räumlichen Position der Gitterknoten und -kanten zum Zweck der Kopplung erforderlich. Bei der Platzierung des Koordinatenursprungs im Mittelpunkt des Magneten ist die Position der Schnittfläche Γ durch die halbe Länge des Magnetjochs über $z_{\text{int}} = l_{\text{Joch}}/2$ gegeben.

Formulierung über das magnetische Skalarpotential

Die zur Bestimmung der magnetischen Feldstärke führende Formulierung unter Verwendung des reduzierten magnetischen Skalarpotentials ist in Gleichung (2.42) gegeben. Die zugehörige schwache Formulierung ergibt sich in Anlehnung an den elektrostatischen Fall unter Verwendung entsprechender Testfunktionen im Rahmen des Galerkin-Verfahrens zu

$$\int_V \left(\mu \nabla \phi_m \cdot \nabla w_{i',q'}^{s,[3d,fese]} \right) dV - \int_{\partial V} \left(B_n w_{i',q'}^{s,[3d,fese]} \right) dA = \int_V \left(\mu \vec{H}_s \cdot \nabla w_{i',q'}^{s,[3d,fese]} \right) dV, \quad (5.73)$$

wobei die rechte Seite virtuelle magnetische Ladungen beschreibt, welche durch die unter Umständen unphysikalische Wahl des Quellenfeldes \vec{H}_s entstehen. Die gebräuchliche kanonische Zuordnung der bei der numerischen Simulation verwendeten Potentiale, Feldstärken und Flussgrößen sieht die Assoziation skalarer Größen mit Gitterpunkten vor. Zur Sicherstellung der tangentialen Stetigkeit über die Grenzen der Elemente hinweg erfolgt in diesem Zusammenhang eine Darstellung der elektrischen sowie magnetischen Feldstärke bezüglich der Gitterkanten. Der herkömmlichen Vorgehensweise folgend, geht diese Assoziation in die Wahl entsprechender Ansatzfunktionen im Rahmen der Methode der Finiten Elemente

über. Somit sind zur Diskretisierung der Formulierung in Gleichung (5.73) sowohl skalare als auch vektorielle Ansatzfunktionen erforderlich.

Diskretisierung im symmetriefreien Gebiet

Unter Verwendung skalarer Ansatzfunktionen $w_i^{s,3d}$ zur Approximation des reduzierten magnetischen Skalarpotentials ergibt sich analog zum elektrostatischen Fall für die linke Seite von Gleichung (5.73) eine Darstellung über eine Steifigkeitsmatrix sowie einen Vektor korrespondierend zu der gewichteten Flussgröße. Die elementweisen Einträge lauten

$$(\mathbf{K}_\mu^{s,3d,e})_{i,i'} = \int_{\Omega_{2,e}^e} \left(\nabla w_i^{s,3d} \cdot \mu_e \cdot \nabla w_{i'}^{s,3d} \right) dV, \quad (5.74)$$

$$(\mathbf{g}_\mu^{s,3d,e})_{i'} = - \int_{\partial\Omega_{2,e}^e \cap \partial\Omega_2} \left(B_n w_{i'}^{s,3d} \right) dA, \quad (5.75)$$

wobei die globale Darstellung durch eine Summation über alle Elemente e gewonnen wird. Zur Diskretisierung der rechten Seite von Gleichung (5.73) wird auf den topologischen Zusammenhang zwischen den vektoriellen Ansatzfunktionen mit tangentialer sowie normaler Stetigkeit zurückgegriffen. Im hier betrachteten Fall niedrigster Ordnung sind die Koeffizienten der flächenbasierten Approximation der elektrischen Stromdichte \vec{J} durch eine Integration derselben über die einzelnen Gitterflächen gegeben. Die Koeffizienten können somit alternativ auch aus einer gegebenen, stückweise konstanten Verteilung der Stromdichte auf den einzelnen Elementen durch eine Mittelung über benachbarte Flächen direkt berechnet werden. Zum Zweck der Bestimmung des Hilfsfeldes H_s muss in diesem Fall die Beziehung

$$\mathbf{C} \mathbf{h}_s^{\text{tv},3d} = \mathbf{j}_e^{\text{nv},3d} \quad (5.76)$$

unter Verwendung der integralen Freiheitsgrade \mathbf{h}_s^{tv} und \mathbf{j}_e^{nv} sowie des diskreten topologischen Rotationsoperators \mathbf{C} erfüllt werden. Zur Lösung dieses überbestimmten Systems wird auf algebraische Weise durch linksseitige Multiplikation mit \mathbf{C}^T eine entsprechende Matrixgleichung erzeugt. Diese ist konsistent singulär, jedoch im vorliegenden Fall finiter Elemente niedrigster Ordnung vergleichsweise gut konditioniert. Die Lösung des Systems liefert eine kantenbasierte Darstellung des gesuchten Hilfsfeldes. Wird die entsprechende Approximationsvorschrift in das Integral auf der rechten Seite von Gleichung (5.73) eingesetzt, ergibt sich zunächst die Bestimmungsgleichung einer gemischten Massenmatrix, die aus der Integration des Produktes aus skalaren und vektoriellen Ansatzfunktionen entsteht. Unter Berücksichtigung der durch die Konstruktionsvorschrift gegebenen exakten Sequenz kann der Gradient der skalaren Ansatzfunktionen stets durch eine Linearkombination der tangential stetigen vektoriellen Funktionen ausgedrückt werden. In der Folge

kann eine Darstellung der virtuellen magnetischen Ladungen über

$$\mathbf{q}_m^{s,3d} = -\mathbf{G}^T \mathbf{M}_\mu^{tv,3d} \mathbf{h}_s^{tv,3d} \quad (5.77)$$

erfolgen. Dabei beschreibt die Matrix $-\mathbf{G}^T$ formal den diskreten Divergenzoperator. Somit sind die Einträge der ersten Zeile des ungekoppelten Systems in Gleichung (5.61) gemäß $\mathbf{A}^{3d} = \mathbf{K}_\mu^{s,3d}$, $\mathbf{g}^{3d} = \mathbf{g}_\mu^{s,3d}$ sowie $\mathbf{f}^{3d} = \mathbf{q}_m^{s,3d}$ für den symmetriefreien Teil Ω_2 des Gebietes Ω gegeben.

Diskretisierung im translationssymmetrischen Gebiet

Da es sich bei Ω_1 im vorliegenden Fall um ein abgeschlossenes Gebiet handelt, stellt der Einsatz von Legendre- oder Tschebyscheff-Polynomen zur Approximation in z -Richtung eine sinnvolle Wahl dar. Dabei bieten letztere den Vorteil einer effizienten Möglichkeit zur Umrechnung der Approximationskoeffizienten in die Abtastwerte mittels einer schnellen Fouriertransformation (FFT). Dies macht sich jedoch erst bei der Berücksichtigung einer Polynomordnung größer als 20 positiv bemerkbar. Da in diesem Fall zu erwarten ist, dass bereits eine geringere Ordnung ausreichend ist, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen, werden im folgenden Legendre-Polynome verwendet, die innerhalb der Bezeichnung der entsprechenden Matrizen durch den zusätzlichen Index L gekennzeichnet sind. Diese bieten desweiteren den Vorteil der Orthogonalität bezüglich der Gewichtsfunktion $g(s) = 1$ bei der Bildung innerer Produkte. Somit ist eine symmetrische Kopplung zu dem unter Verwendung herkömmlicher Finite-Elemente-Verfahren diskretisierten Gebiet Ω_2 unmittelbar möglich. Die Systemmatrix für das translationssymmetrische Gebiet ergibt sich analog zu Gleichung (5.69) gemäß

$$\mathbf{A}^{\text{fese}} = \mathbf{K}_\mu^{s,\text{fese}} = \frac{1}{2} \mathbf{M}_{\text{SE}}^L \otimes \frac{1}{2} \mathbf{K}_\mu^{s,2d} + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{\text{SE}}^L \otimes \frac{2}{\ell_z^2} \mathbf{M}_\mu^{s,2d}, \quad (5.78)$$

wobei die zu der spektralen Diskretisierung in z -Richtung gehörigen Steifigkeits- und Massenmatrizen \mathbf{K}_{SE}^L und \mathbf{M}_{SE}^L die in Gleichung (3.152) sowie Gleichung (3.153) aufgeführten Einträge besitzen. In der Mitte des Gebietes Ω_1 liegt eine diskrete Spiegelsymmetrie vor. Daher weist die resultierende Potentialverteilung ebenfalls eine entsprechende Symmetrie auf. Bezüglich der z -Richtung kann diese somit unter Verwendung gerader Funktionen q_g dargestellt werden. Dies wird im Rahmen der Diskretisierung durch das Entfernen der zu den ungeraden Polynomen gehörigen Zeilen und Spalten in den Matrizen \mathbf{K}_{SE}^L und \mathbf{M}_{SE}^L sichergestellt. Die Dimension der zu der Diskretisierung mittels Spektralelementen gehörigen Matrizen entspricht dem höchsten Polynomgrad, welcher in der Approximation berücksichtigt wird, abzüglich der Anzahl entfernter Zeilen und Spalten. Für den Randintegralterm ergibt sich in Anlehnung an Gleichung (5.79) der Ausdruck

$$(\mathbf{g}_\mu^{s,\text{fese},e})_{i',q'} = - \int_{\partial\Omega_{1,e}^e \cap \partial\Omega_1} (B_n v_{i',q'}^{s,\text{fese}}) dA. \quad (5.79)$$

Damit folgt $\mathbf{g}^{\text{fese}} = \mathbf{g}_\mu^{\text{s,fese}}$ für den entsprechenden Eintrag innerhalb des gekoppelten Systems in Gleichung (5.61). Zur Bestimmung der virtuellen magnetischen Ladungen auf der rechten Seite von Gleichung (5.73) kommt eine modifizierte Form von Gleichung (5.77) gemäß

$$\mathbf{q}_m^{\text{s,fese}} = -\mathbf{G}_{\text{fese}}^T \mathbf{M}_\mu^{\text{tv,fese}} \mathbf{h}_s^{\text{tv,fese}} \quad (5.80)$$

zum Einsatz [182]. Die Matrix $\mathbf{M}_\mu^{\text{tv,fese}}$ geht dabei unter Ersetzung des Materialparameters σ durch μ aus Gleichung (5.58) hervor. Da die in Abschnitt 5.2 konstruierten hybriden Ansatzfunktionen ebenfalls eine exakte Sequenz bilden, ist derselben Argumentation wie im dreidimensionalen Fall folgend, geht der diskrete Divergenzoperator aus der Transposition des diskreten Gradientenoperators

$$\mathbf{G}_{\text{fese}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \otimes \mathbf{G}_{2d} \\ \mathbf{L}_{\text{SE}}^L \otimes \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

hervor, wobei \mathbf{G}_{2d} analog zum dreidimensionalen Fall die Inzidenzbeziehung zwischen Gitterkanten und -knoten in der (x, y) -Ebene beinhaltet. Im vorliegenden Beispiel weist die zur Bestimmung des Hilfsfeldes erforderliche eingeprägte Stromdichte innerhalb von Ω_2 lediglich eine Komponente in z -Richtung auf. Daher liegt das resultierende Hilfsfeld $\mathbf{h}_s^{\text{tv,fese}}$ in der (x, y) -Ebene. In der Folge verschwinden die zu $\bar{v}_{i,q}^{\text{tv,fese},w}$ mit $w = z$ gehörigen Koeffizienten innerhalb der vektoriellen Approximation. Weiterhin ist die eingeprägte Stromdichte konstant, so dass nur die Koeffizienten $h_{i,0}^{\text{tv,fese},xy}$ der Approximation des Hilfsfeldes von Null verschieden sind. Aufgrund der in diesem Fall konformen Diskretisierung der Schnittfläche können die zugehörigen Einträge des Vektors $\mathbf{h}_s^{\text{tv,fese}}$ über den Selektionsoperator $\mathbf{Q}_{3d}^{\text{tv}}$ dem für Ω_2 berechneten Vektor $\mathbf{h}_s^{\text{tv},3d}$ entnommen werden. Mit $\mathbf{f}^{\text{fese}} = \mathbf{q}_m^{\text{s,fese}}$ ist damit das ungekoppelte System in Gleichung (5.61) für diesen Fall vollständig bestimmt.

Kopplung der Gebiete bei konform diskretisierter Schnittfläche

Zur Kopplung der Freiheitsgrade im Rahmen der verwendeten magnetostatischen Formulierung werden die Stetigkeitsbedingungen für die magnetische Feldstärke sowie die magnetische Flussdichte herangezogen. Da sich durch die Bildung des Gradienten des magnetischen Skalarpotentials die magnetische Feldstärke ergibt, wird deren Stetigkeit analog zum elektrostatischen Fall explizit durch Gleichsetzen der knotenbasierten Freiheitsgrade auf den beiden Seiten der Schnittfläche erzwungen. Nach Einsetzen der entsprechenden Approximationsvorschriften unter Verwendung der verschiedenen Ansatzfunktionen ergibt sich für die Werte der mit der Schnittfläche assoziierten Freiheitsgrade der Zusammenhang

$$\phi_m^{3d} - \phi_m^{\text{fese}} \approx \sum_i u_i^{3d} w_i^{\text{s},3d} - \sum_q \sum_i u_{i,q}^{\text{fese}} v_{i,q}^{\text{s,fese}} = 0, \quad (5.82)$$

welcher für die Erfüllung der Stetigkeitsbedingung der tangentialen Komponente der magnetischen Feldstärke maßgeblich ist. Durch eine Restriktion auf die zweidimensionale

Schnittfläche ist die Spur der Knotenfunktionen $w_i^{s,3d}$ durch die zugehörigen zweidimensionalen Funktionen $w_i^{s,2d}$ gegeben [183]. Gleichmaßen gehen die hybriden Ansatzfunktionen im Symmetrieggebiet auf der Basis ihrer Definition als Tensorprodukt ebenfalls in die bei der Konstruktion involvierten Ansatzfunktionen $w_i^{s,2d}$ über, da die berücksichtigten geraden Polynome alle auf den Wert 1 für $z = z_{\text{int}}$ normiert sind. Die mit diesen Ergebnissen vereinfachte Gleichung (5.82) wird mit Testfunktionen $w_{i'}^{s,2d}$ gewichtet und über die Fläche Γ integriert. Damit geht Gleichung (5.82) in die Form

$$\sum_i u_i^{3d} \underbrace{\int_{\Gamma_e^e} (w_i^{s,2d} w_{i'}^{s,2d}) dA}_{(\mathbf{M}_{\text{sp}}^{s,2d})_{i,i'}} + \sum_q \sum_i u_{i,q}^{\text{fese}} \underbrace{\int_{\Gamma_e^e} (w_i^{s,2d} w_{i'}^{s,2d}) dA}_{(\mathbf{M}_{\text{sp}}^{s,2d})_{i,i'}} = 0 \quad (5.83)$$

über. Zusammen mit den bereits eingeführten Selektionsoperatoren kann dieser Zusammenhang in Matrixform gemäß

$$\mathbf{M}_{\text{sp}}^{s,2d} \mathbf{Q}_{3d} \mathbf{u}^{3d} + \sum_q \mathbf{M}_{\text{sp}}^{s,2d} \mathbf{Q}_{\text{fese},q} \mathbf{u}^{\text{fese},q} = 0 \quad (5.84)$$

gebracht werden. Die Bezeichnung $\mathbf{M}_{\text{sp}}^{s,2d}$ erfolgt anhand der Ähnlichkeit zu einer Massennmatrix, welche durch den Ausdruck

$$\mathbf{M}_{\text{sp}}^{s,2d} = \frac{1}{\ell_z} \mathbf{M}_1^{s,2d} \quad (5.85)$$

im Vergleich mit Gleichung (5.16) bei einer virtuellen Materialeigenschaft 1 deutlich wird. Somit ist die letzte Zeile in dem gekoppelten System in Gleichung (5.65) durch den Blockzeilenvektor

$$\left(\mathbf{M}_{\text{sp}}^{s,2d} \mathbf{Q}_{3d} \quad , \quad -(\mathbf{i}^T \otimes \mathbf{M}_{\text{sp}}^{s,2d}) \mathbf{Q}_{\text{fese}} \quad , \quad 0 \right) \quad (5.86)$$

mit einem Einheits-Spaltenvektor \mathbf{i} der passenden Länge gegeben. Damit wird die primäre Stetigkeitsbedingung im flächengemittelten Sinne erfüllt. Die duale Bedingung ist über die Forderung nach der Stetigkeit der auf der Schnittfläche senkrecht stehenden Komponente B_n der magnetischen Flussdichte gegeben. Diese, in Gleichung (5.75) auftretende, Komponente wird gemäß

$$B_n(x, y) \approx \sum_i m_{3d,i} w_i^{s,2d} \quad (5.87)$$

auf der in diesem Fall in der (x, y) -Ebene liegenden Schnittfläche über die Freiheitsgrade $m_{3d,i}$ approximiert. Dazu werden wiederum die auf die Ebene restringierten Ansatzfunktionen $w_i^{s,2d}$ verwendet. Durch Einsetzen von Gleichung (5.87) in Gleichung (5.75) ergeben sich die Ausdrücke

$$\mathbf{g}_\mu^{s,3d} = \mathbf{Q}_{3d}^T \mathbf{M}_{\text{sp}}^{s,2d} \mathbf{m}_{3d} \quad , \quad (5.88)$$

$$\mathbf{g}_\mu^{s,\text{fese}} = -\mathbf{i} \otimes (\mathbf{Q}_{\text{fese}}^T \mathbf{M}_{\text{sp}}^{s,2d}) \mathbf{m}_{3d} \quad , \quad (5.89)$$

für die beiden Gebiete Ω_1 und Ω_2 , wobei die Matrix $\mathbf{M}_{\text{sp}}^{\text{s},2\text{d}}$ aufgrund der Kommutativität des Skalarproduktes symmetrisch ist. Auf diese Weise wird die duale Stetigkeitsbedingung über die als Lagrange-Multiplikatoren wirkenden Freiheitsgrade $\mathbf{m}_{3\text{d}}$ in das gekoppelte System aufgenommen. Das resultierende System ist indefinit, jedoch im Fall der beschriebenen Kopplung symmetrisch und regulär. Somit kann die Lösung über ein direktes Verfahren auf der Basis einer LU-Zerlegung erfolgen.

Untersuchung des Konvergenzverhaltens

Zur Untersuchung der Effizienz des hybriden Diskretisierungsverfahrens bezüglich der erforderlichen Anzahl an Freiheitsgraden zum Erreichen einer gegebenen Genauigkeits-schranke werden drei Simulationsreihen durchgeführt. Die Simulation wird für das in Abbildung 5.14(a) dargestellte Modell des SIS-100-Magneten mit vollständiger Länge von 3.002 m sowie für ein auf eine Länge von 0.5 m verkürztes Modell durchgeführt. Als Vergleichswerte werden die mit einer herkömmlichen dreidimensionalen Finite-Elemente-Methode erzielten Ergebnisse unter Verwendung des magnetischen Skalarpotentials sowie des magnetischen Vektorpotentials herangezogen. Zur Untersuchung der Konvergenzeigenschaften der beteiligten Verfahren dient die gesamte im betrachteten Volumen gespeicherte magnetische Energie als Zielgröße. Im Fall der Formulierung in Verbindung mit dem magnetischen Vektorpotential werden die Simulationen im Programm CST EM STUDIO® durchgeführt, welches eine Auswertung der Zielgröße unmittelbar bereitstellt. Die herkömmliche dreidimensionale Formulierung unter Verwendung des magnetischen Skalarpotentials liegt in Form einer Implementierung in MATLAB® vor. Der Wert der gespeicherten magnetischen Energie wird in diesem Fall über

$$W_{\text{m}}^{\text{msp},3\text{d}} = \frac{1}{2} (\mathbf{h}_{\text{s}}^{\text{tv},3\text{d}} - \mathbf{G}_{3\text{d}} \mathbf{u}^{\text{s},3\text{d}})^{\text{T}} \mathbf{M}_{\mu}^{\text{tv},3\text{d}} (\mathbf{h}_{\text{s}}^{\text{tv},3\text{d}} - \mathbf{G}_{3\text{d}} \mathbf{u}^{\text{s},3\text{d}}) \quad (5.90)$$

aus der berechneten Lösung für die Freiheitsgrade $\mathbf{u}^{\text{s},3\text{d}}$ sowie dem zuvor erzeugten Hilfsfeld $\mathbf{h}_{\text{s}}^{\text{tv},3\text{d}}$ bestimmt. Für den Fall des hybriden Diskretisierungsverfahrens erfolgt eine getrennte Auswertung in den beiden Bereichen Ω_1 und Ω_2 . Die gesamte magnetische Energie ergibt sich durch eine Addition der Terme

$$W_{\text{m}}^{\text{msp},3\text{d}} = \frac{1}{2} (\mathbf{h}_{\text{s}}^{\text{tv},3\text{d}} - \mathbf{G}_{3\text{d}} \mathbf{u}^{\text{s},3\text{d}})^{\text{T}} \mathbf{M}_{\mu}^{\text{tv},3\text{d}} (\mathbf{h}_{\text{s}}^{\text{tv},3\text{d}} - \mathbf{G}_{3\text{d}} \mathbf{u}^{\text{s},3\text{d}}) , \quad (5.91)$$

$$W_{\text{m}}^{\text{msp},\text{fese}} = \frac{1}{2} (\mathbf{h}_{\text{s}}^{\text{tv},\text{fese}} - \mathbf{G}_{\text{fese}} \mathbf{u}^{\text{s},\text{fese}})^{\text{T}} \mathbf{M}_{\mu}^{\text{tv},\text{fese}} (\mathbf{h}_{\text{s}}^{\text{tv},\text{fese}} - \mathbf{G}_{\text{fese}} \mathbf{u}^{\text{s},\text{fese}}) . \quad (5.92)$$

Die Simulationen werden in allen drei Fällen für unterschiedliche Diskretisierungsstufen durchgeführt. Aufgrund der Dualität der unterschiedlichen Potentialformulierungen kann der Mittelwert der für das feinste Gitter erzielten Werte als Referenz zur Bestimmung des relativen Fehlers in der magnetischen Energie herangezogen werden. In Abbildung 5.15(a) sind die diesbezüglichen Ergebnisse für den verkürzten Magneten über der Anzahl verwen-

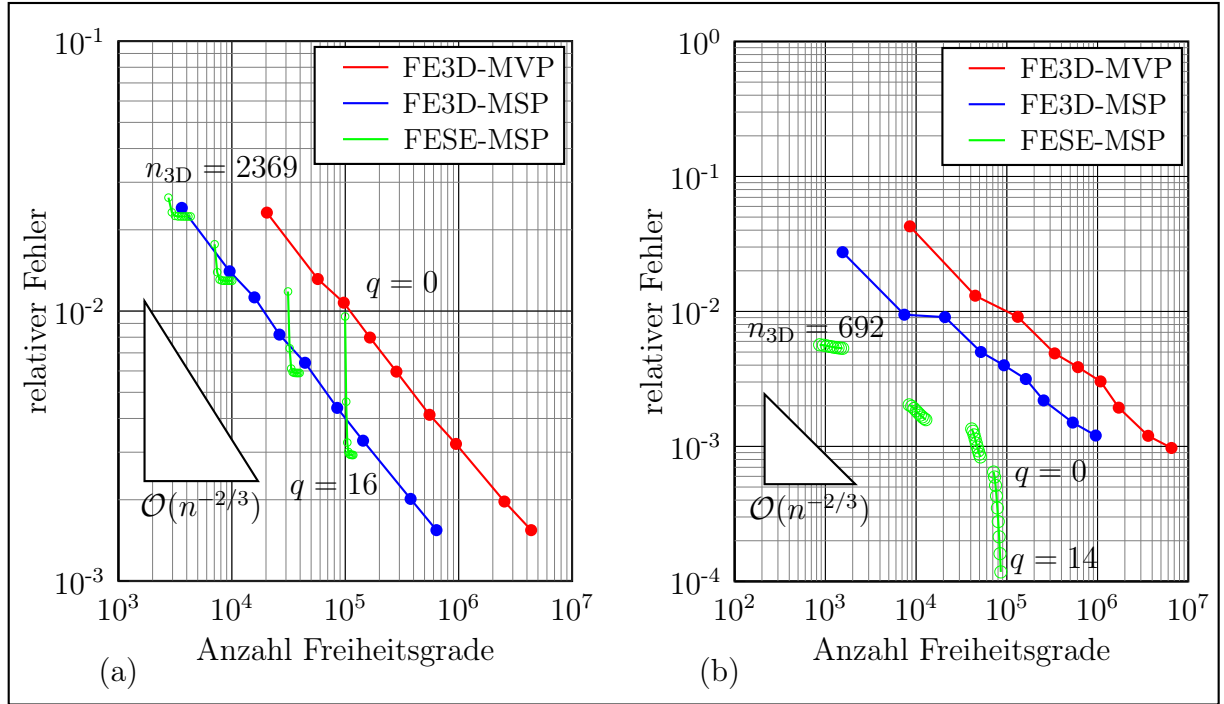


Abbildung 5.15: *Relativer Fehler in der magnetischen Energie: Lösung mit einem dreidimensionalen Finite-Elemente-Verfahren (FE) unter Verwendung des magnetischen Vektorpotentials (MVP) und des magnetischen Skalarpotentials (MSP) im Vergleich mit dem hybriden Verfahren (FESE-MSP). Vier unterschiedliche Diskretisierungsstufen n_{3D} im 3D-Gebiet in Verbindung mit steigender Polynomordnung $q \in \{0, \dots, 16\}$. (a) Auf 0.5 m verkürztes Joch; (b) bei voller Länge der Magnetjochs von 3.002 m.*

deter Freiheitsgrade aufgetragen. Für den Fall des magnetischen Vektorpotentials (FE3D-MVP) wie auch bei der Verwendung des herkömmlichen Ansatzes in Verbindung mit dem magnetischen Skalarpotential (FE3D-MSP) sinkt der relative Fehler mit der im dreidimensionalen Fall zu erwartenden Rate bei steigender Anzahl an Freiheitsgraden. Da die skalare Formulierung auf einer Approximation bezüglich der Knotenwerte basiert, sind im Vergleich zur vektoriellen Formulierung weniger Freiheitsgrade zum Erreichen derselben Genauigkeit erforderlich. Die weiteren in der Abbildung enthaltenen Kurven korrespondieren zu verschiedenen Simulationsreihen unter Einsatz des hybriden Verfahrens (FESE). Zur Untersuchung der Konvergenz bezüglich der Anzahl berücksichtigter Polynomordnungen sind für eine gegebene Anzahl an Freiheitsgraden in Ω_2 , die mit n_{3D} bezeichnet ist, die jeweils erzielten Werte für ansteigende Polynomordnung verzeichnet. Es wird deutlich, dass bei zu geringer Approximationsordnung in z -Richtung der Diskretisierungsfehler bei steigender Anzahl an Freiheitsgraden nur sehr langsam sinkt. Bei der Berücksichtigung

höherer Polynomordnungen ist jedoch die zu erwartende spektrale Konvergenz zu beobachten. Allerdings tritt bei einer festgelegten Diskretisierungsstufe ab einem gewissen Polynomgrad keine weitere Verringerung des relativen Fehlers mehr auf. Ab diesem Bereich wird der bei der Auswertung betrachtete gesamte relative Fehler durch nicht dem Symmetriegbiet selbst zuzuweisende Anteile dominiert. Diese resultieren zum einen aus der Diskretisierung der Schnittfläche und zum anderen aus der Kopplung zwischen den beiden Gebieten, welche in der beschriebenen Form nur eine lineare Konvergenz zulässt. Der Vorteil der hybriden Diskretisierung tritt wesentlich deutlicher im Fall eines weiter ausgedehnten Symmetriegbietes zu Tage. In Abbildung 5.15(b) sind die entsprechenden Ergebnisse für eine Magnetkonfiguration, in der die Länge des Magnetjochs 3.002 m beträgt, dargestellt. Die Kurven verlaufen qualitativ ähnlich wie im vorangegangenen Fall. Jedoch ist nun bei der Verwendung des hybriden Verfahrens eine deutlich höhere Genauigkeit zu erreichen als mit den herkömmlichen Verfahren. Zur Bestimmung einer Lösung ähnlicher Genauigkeit sind in Verbindung mit diesen mitunter mehrere hundert Millionen Freiheitsgrade erforderlich. Die Simulation von Modellen einer solchen Größe ist trotz der zunehmenden Verfügbarkeit von Multicomputern bei der Verwendung unstrukturierter Gitter kaum in einem akzeptablen Zeitrahmen möglich.

Formulierung unter Verwendung des magnetischen Vektorpotentials

Auch wenn die zeitliche Variation in der Formulierung nicht berücksichtigt wird, kann die räumliche Verteilung der magnetischen Flussdichte unter Verwendung des magnetischen Vektorpotentials beschrieben werden. Die entsprechende schwache Form der zugrundeliegenden Differentialgleichung ist in Gleichung (3.100) gegeben. Im weiteren erfolgt eine Diskretisierung der Formulierung unter Verwendung von Ansatzfunktionen mit tangentialer Stetigkeit. Dabei wird wie in den vorangegangenen Abschnitten zunächst eine separate Darstellung innerhalb der beiden in diesem Beispiel vorkommenden Gebiete Ω_1 und Ω_2 erzeugt.

Diskretisierung im symmetriefreien Gebiet

In dem Gebiet Ω_2 , welches den Endbereich des Magneten einschließlich der gekrümmten Spule umfasst, erfolgt eine Diskretisierung unter Verwendung herkömmlicher Ansatzfunktionen $\vec{w}_i^{\text{tv},3\text{d}}$ niedrigster Ordnung. Dies führt zu der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_\nu^{\text{tv},3\text{d}}$ deren Einträge aus den in Gleichung (3.112) angegebenen Elementmatrizen hervorgehen. Der Lösungsvektor $\mathbf{u}^{3\text{d}}$ innerhalb des ungekoppelten Systems in Gleichung (5.61) enthält in diesem Fall die Freiheitsgrade der Approximation des magnetischen Vektorpotentials mittels vektorieller Ansatzfunktionen. Der zu der eingepprägten Stromdichte auf der rechten

Seite der schwachen Formulierung korrespondierende Vektor $\mathbf{f}^{3d} = \mathbf{j}_e^{\text{tv},3d}$ wird gemäß

$$(\mathbf{j}_e^{\text{tv},3d})_{k'} = \sum_e \int_{V_e} \vec{J}_e \cdot \vec{w}_{k'}^{\text{tv},3d} dV \quad (5.93)$$

über die Multiplikation mit den Testfunktionen $\vec{w}_{k'}^{\text{tv},3d}$ in Verbindung mit der Integration über das Volumen der einzelnen Elemente bestimmt. Dabei verbindet die Kante mit dem Index k die Gitterknoten mit den Indizes i, j . Weiterhin ist der aus dem Randintegral resultierende Term \mathbf{g}^{3d} in diesem Fall durch die gewichtete Komponenten $\vec{H}_t = \vec{H} \times \vec{n}$ der magnetischen Feldstärke gemäß

$$(\mathbf{g}_\nu^{\text{tv},3d,e})_{k'} = \int_{\partial\Omega_{2,e}^s \cap \partial\Omega_2} (\vec{H}_t \vec{w}_{k'}^{\text{tv},3d}) dA \quad (5.94)$$

gegeben. Dabei bezeichnet \vec{n} einen senkrecht auf der Schnittfläche stehenden Vektor¹. Damit ergibt sich im ungekoppelten System in Gleichung (5.61) der entsprechende Term zu $\mathbf{g}^{3d} = \mathbf{g}_\nu^{\text{tv},3d}$.

Diskretisierung im translationssymmetrischen Gebiet

Innerhalb des Gebietes Ω_2 kommen die in Abschnitt 5.2.2 beschriebenen vektoriellen Ansatzfunktionen mit separater Behandlung der Komponenten in der (x, y) -Ebene sowie in z -Richtung zum Einsatz. Die Anwendung des Galerkin-Verfahrens auf die zugrundeliegende Differentialgleichung in Gleichung (2.44) liefert in diesem Fall die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_\nu^{\text{tv,fese}}$ in Gleichung (5.51) mit $uv = xy$ sowie $w = z$. Bei der hier vorliegenden kontinuierlichen Translationssymmetrie gilt $\ell_w = f_w = \ell_z = 2z_{\text{int}}$ wobei sich die Schnittfläche an der Position $z = \gamma$ befindet. Durch die Transformation auf das Einheitsintervall $[-1, 1]$ ergibt sich der Koeffizient $f_s = \ell_z/2$. Damit lautet die für diesen Fall relevante Form der Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_\nu^{\text{tv,fese}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\text{SE}}^L \otimes \frac{1}{2} \mathbf{K}_\nu^{\text{tv},2d,xy} + \mathbf{K}_{\text{SE}}^L \otimes \frac{2}{\ell_z^2} \mathbf{M}_\nu^{\text{tv},2d,xy} & -\mathbf{L}_{\text{SE}}^L \otimes \mathbf{L}_\nu^{\text{tv},2d} \\ -(\mathbf{L}_{\text{SE}}^L)^T \otimes (\mathbf{L}_\nu^{\text{tv},2d})^T & \mathbf{M}_{\text{SE}}^L \otimes \frac{1}{2} \mathbf{K}_\nu^{\text{tv},2d,z} \end{pmatrix}. \quad (5.95)$$

Die zusätzliche Präsenz einer diskreten Spiegelsymmetrie innerhalb des Gebietes führt zu einer weiteren Vereinfachung bei der Berücksichtigung der physikalischen Bedeutung der einzusetzenden Randbedingung. Diese wird als homogene Dirichlet-Randbedingung an das magnetische Vektorpotential bei $z = 0$ implementiert. Um dieser Bedingung gerecht zu werden, müssen für die Variation der (x, y) -Komponente des magnetischen Vektorpotentials in z -Richtung nur die geraden Polynome berücksichtigt werden. Umgekehrt sind für

¹Der Vektor \vec{H}_t ist nicht identisch mit der tangentialen Komponente der magnetischen Feldstärke. Er liegt in der Schnittfläche und steht senkrecht auf dem in der Ebene liegenden Anteil von \vec{H} .

die Variation der z -Komponente nur die ungeraden Polynomordnungen relevant. Damit muss zwischen den in Gleichung (5.95) an verschiedenen Stellen auftretenden spektralen Matrizen unterschieden werden. Die ausschließlich aus Produkten gerader Polynome resultierenden Matrizen werden durch einen weiteren Index „ g “ gekennzeichnet, während die zu Produkten ungerader Polynome korrespondierenden den Index „ u “ erhalten. Bei dem gemischten Term \mathbf{L}_{SE}^L wird der zu dem differenzierten Polynom gehörige Index mit „ u “ bezeichnet. Im vorliegenden Fall sind die aus dem Produkt entstehenden Polynome stets gerade, da bei dem gemischten Term das ungerade Polynom differenziert wird und die Multiplikation mit einem gerade Polynom erfolgt. Daher kann die gesamte Matrix mit dem Faktor $1/2$ multipliziert werden und beschreibt damit ein Achtel des gesamten Magnetjochs. Unter Anpassung an die Symmetrieverhältnisse auf die beschriebene Weise kann Gleichung (5.95) gemäß

$$\mathbf{K}_{\nu}^{\text{tv,fese}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{SE}^{\text{L,gg}} \otimes \frac{1}{2} \mathbf{K}_{\nu}^{\text{tv,2d,xy}} + \mathbf{K}_{SE}^{\text{L,gg}} \otimes \frac{2}{\ell_z^2} \mathbf{M}_{\nu}^{\text{tv,2d,xy}} & -\mathbf{L}_{SE}^{\text{L,gu'}} \otimes \mathbf{L}_{\nu}^{\text{tv,2d}} \\ -(\mathbf{L}_{SE}^{\text{L,gu'}})^T \otimes (\mathbf{L}_{\nu}^{\text{tv,2d}})^T & \mathbf{M}_{SE}^{\text{L,uu}} \otimes \frac{1}{2} \mathbf{K}_{\nu}^{\text{tv,2d,z}} \end{pmatrix} \quad (5.96)$$

umformuliert werden. In der Bestimmungsgleichung des Randintegralterms kommt nur die tangentielle Komponente der magnetischen Feldstärke in der (x, y) -Ebene vor. Deren Skalarprodukt mit den in z -Richtung orientierten Ansatzfunktionen ist demzufolge identisch Null. Der entsprechende Eintrag in dem ungekoppelten System ergibt sich mit $uv = xy$ zu

$$\mathbf{g}_{\nu}^{\text{tv,fese,xy}} = \sum_e \int_{\Gamma_s^e} \vec{H}_t \cdot \vec{v}_{i',j',q'}^{\text{tv,fese,uv}} dA. \quad (5.97)$$

Damit ist der gesamte Vektor in Ω_1 durch $\mathbf{g}^{\text{fese}} = (\mathbf{g}_{\nu}^{\text{tv,fese,xy}}, 0)^T$ gegeben. Die eingeprägte Stromdichte im Symmetrieggebiet besitzt lediglich eine Komponente in z -Richtung, welche zudem konstant in dieser Richtung ist. Somit kann die bekannte Stromdichte auf dem Spulenquerschnitt innerhalb der Schnittfläche für $w = z$ gemäß

$$\mathbf{j}_e^{\text{tv,fese,z}} = \sum_e \int_{\Gamma_s^e} \vec{j}_e^{\text{tv,2d}} \cdot \vec{v}_{i',0}^{\text{tv,fese,w}} \ell_z dA \quad (5.98)$$

in die Formulierung aufgenommen werden. Für die rechte Seite des ungekoppelten Systems in Gleichung (5.61) folgt damit $\mathbf{f}^{\text{fese}} = (0, \mathbf{j}_e^{\text{tv,fese,z}})^T$.

Kopplung der Gebiete im Fall vektorieller Freiheitsgrade

Die bereits weiter oben beschriebene Vorgehensweise zur Kopplung der beiden Gebiete Ω_1 und Ω_2 über die innerhalb der Formulierung relevanten Stetigkeitsbedingungen kann auf den vektoriellen Fall übertragen werden. Wiederum ist die Stetigkeit der tangentialen

Komponente der magnetischen Feldstärke sowie der normalen Komponente der magnetischen Flussdichte sicherzustellen, um eine im physikalischen Sinne korrekte Lösung zu erhalten. In diesem Fall wird jedoch die letztgenannte Bedingung explizit über zusätzliche Gleichungen dem ungekoppelten System hinzugefügt. Durch Gleichsetzen der tangentialen Komponente des magnetischen Vektorpotentials auf den beiden Seiten der Schnittfläche wird die Stetigkeit der normalen Komponente der magnetischen Flussdichte erzwungen. Zusammen mit der zugehörigen Approximationsvorschrift ergibt sich der Zusammenhang

$$\vec{A}_t^{3d} - \vec{A}_t^{\text{fese}} \approx \sum_k a_k^{\text{tv},3d} \vec{w}_k^{\text{tv},3d} - \sum_q \sum_{i,j} a_{i,j,q}^{\text{tv,fese},xy} \vec{v}_{i,j,q}^{\text{tv,fese},uv} = 0, \quad (5.99)$$

wobei in diesem Fall $uv = xy$ gilt. Die Restriktion der beteiligten Ansatzfunktionen auf die Schnittfläche liefert in beiden Gebieten die Funktionen $\vec{w}_{i,j}^{\text{tv},2d,xy}$. Die Anwendung des Galerkin-Verfahrens in Verbindung mit Testfunktionen $\vec{w}_{i',j'}^{\text{tv},2d,xy}$ auf Gleichung (5.99) führt analog zu Gleichung (5.84) auf die Darstellung

$$\mathbf{M}_{\text{sp}}^{\text{tv},2d,xy} \mathbf{Q}_{3d} \mathbf{u}^{3d} + \sum_q \mathbf{M}_{\text{sp}}^{\text{tv},2d,xy} \mathbf{Q}_{\text{fese},q} \mathbf{u}^{\text{fese},q} = 0 \quad (5.100)$$

in Matrixform. Dabei bezeichnet die Spurmatrix $\mathbf{M}_{\text{sp}}^{\text{tv},2d,xy}$ eine Massenmatrix im Zusammenhang mit der Spur der dreidimensionalen vektoriellen Ansatzfunktionen in der Schnittebene. Diese ist durch

$$\mathbf{M}_{\text{sp}}^{\text{tv},2d,xy} = \frac{1}{\ell_z} \mathbf{M}_1^{\text{tv},2d,xy} \quad (5.101)$$

in Verbindung mit der virtuellen Materialeigenschaft 1 gegeben. Für die letzte Zeile des gekoppelten Systems in Gleichung (5.65) ergibt sich damit der Block-Zeilenvektor

$$\left(\mathbf{M}_{\text{sp}}^{\text{tv},2d,xy} \mathbf{Q}_{3d} \quad , \quad -(\mathbf{i}^T \otimes \mathbf{M}_{\text{sp}}^{\text{tv},2d,xy}) \mathbf{Q}_{\text{fese}} \quad , \quad 0 \right), \quad (5.102)$$

welcher die Erfüllung der primären Stetigkeitsbedingung an der Schnittfläche sicherstellt. Die duale Stetigkeitsbedingung ist durch die Forderung der Kontinuität der tangentialen Komponente der magnetischen Feldstärke gegeben. In den beiden Gebieten Ω_1 und Ω_2 wird die entsprechende Größe \vec{H}_t in Gleichung (5.94) beziehungsweise Gleichung (5.97) in der Ebene der Schnittfläche über die Ansatzfunktionen $\vec{w}_{i,j}^{\text{tv},2d,xy}$ gemäß

$$\vec{H}_t^{3d} = \sum_{i,j} m_{3d,i,j} \vec{w}_{i,j}^{\text{tv},2d,xy}, \quad (5.103)$$

$$\vec{H}_t^{\text{fese}} = \sum_{i,j} m_{3d,i,j} \vec{w}_{i,j}^{\text{tv},2d,xy}, \quad (5.104)$$

diskretisiert. Die entsprechenden Vektoren innerhalb des ungekoppelten Systems können damit unter Verwendung der Freiheitsgrade \mathbf{m}_{3d} über

$$\mathbf{g}_\nu^{\text{tv},3d} = \mathbf{Q}_{3d}^T \mathbf{M}_{\text{sp}}^{\text{tv},2d,xy} \mathbf{m}_{3d}, \quad (5.105)$$

$$\mathbf{g}_\nu^{\text{tv,fese}} = -\mathbf{i} \otimes (\mathbf{Q}_{\text{fese}}^T \mathbf{M}_{\text{sp}}^{\text{s},2d,xy}) \mathbf{m}_{3d}, \quad (5.106)$$

ausgedrückt werden. Im Rahmen der gekoppelten Formulierung wirken die Freiheitsgrade dieser Approximation als Lagrange-Multiplikatoren zur Sicherstellung der dualen Stetigkeitsbedingung auf der Schnittfläche im schwachen Sinne. Damit ist die Darstellung des gekoppelten Systems in Gleichung (5.65) vollständig bestimmt.

Lösung des resultierenden gekoppelten Systems

Im Gegensatz zu dem aus der skalaren Formulierung resultierenden System liegt im vektoriellen Fall ein konsistent singuläres Gleichungssystem vor. Dies schließt den Einsatz direkter Lösungsverfahren über eine LU-Zerlegung aus. Daher kommen nur iterative Krylov-Unterraum-Verfahren, die zudem nicht auf die positive Definitheit der Systemmatrix angewiesen sind, zur Anwendung in Frage. Eine geeignete Wahl besteht beispielsweise in dem MINRES- oder GMRES-Verfahren [100]. Aufgrund der signifikanten Unterschiede in der Größe der Materialparameter ist die für die Konvergenzgeschwindigkeit derartiger Verfahren maßgebliche Konditionszahl bereits im Fall einer herkömmlichen Diskretisierung unter Verwendung der Methode der Finiten Elemente sehr hoch. Durch die Einführung der stark anisotropen Diskretisierung im Symmetriegebiet, welche im wesentlichen lediglich eine Zelle in Richtung der Symmetrie umfasst, wird diese noch weiter vergrößert. In der Folge verschlechtern sich die Konvergenzeigenschaften der iterativen Lösungsverfahren zusätzlich. Unter allen Umständen ist daher eine effiziente Vorkonditionierung des Systems erforderlich. Eine solche kann unter Verwendung einer positiv definiten Approximation der Inversen der indefiniten Systemmatrix erfolgen, so dass der Einsatz des MINRES-Verfahrens möglich ist [184]. Eine weitere Variante besteht in der Anwendung von Schur-Komplement-Verfahren unter Ausnutzung der Blockstruktur der Systemmatrix [185]. Über diesen Weg können auch indefinite Vorkonditionierer erzeugt werden, für deren Einsatz das GMRES-Verfahren die nötige Flexibilität bietet. Die Entwicklung derartiger spezieller Vorkonditionierer ist jedoch nicht Teil dieser Arbeit.

Die beschriebene vektorielle Formulierung in Verbindung mit dem magnetischen Vektorpotential erlaubt den unmittelbaren Übergang zu einer transienten Formulierung zur Berechnung von Wirbelströmen. Dazu wird lediglich die in Gleichung (5.58) gegebene Massenmatrix im Rahmen eines Verfahrens zur zeitlichen Integration, beispielsweise gemäß Abschnitt 3.4, zu der Steifigkeitsmatrix addiert. Dabei bleibt die Kopplung auf der Basis der vektoriellen Freiheitsgrade unverändert. Auch das Auftreten nichtlinearer Materialeigenschaften sowohl innerhalb des Symmetriegebietes als auch im vollständig dreidimensional modellierten Bereich stellt kein Hindernis zur Anwendung des gekoppelten Verfahrens dar. Die erwähnten unvoreilhaften numerischen Eigenschaften der zu lösenden Gleichungssysteme wirken sich durch die Notwendigkeit einer mehrfachen Lösung innerhalb jedes Zeitschritts jedoch umso stärker aus.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Innerhalb der vorliegenden Arbeit wurde der Schwerpunkt auf den Einsatz bestehender sowie die Entwicklung neuartiger gekoppelter Diskretisierungsverfahren gelegt. Dies erfolgte im Hinblick auf die Anwendung innerhalb der durch quasistatische Approximationen gegebenen unterschiedlichen Teilmengen der Maxwell'schen Gleichungen. Im Vordergrund stand dabei die Methode der Finiten Elemente auf der Basis unstrukturierter Gitter. Trotz der fortschreitenden Weiterentwicklung der Rechnerarchitekturen sowie der steigenden Verfügbarkeit von Arbeitsspeicher ist die numerische Simulation komplexer Geräte nach wie vor mitunter sehr zeitaufwendig oder im Extremfall gar unmöglich. Zur Erweiterung des Einsatzgebietes numerischer Simulationen wurden im Rahmen dieser Arbeit zwei Hauptansätze verfolgt:

- *Parallelisierung*: Die im Rahmen quasistatischer Simulationen im Zeitbereich eingesetzten impliziten Integrationsverfahren erfordern im Fall der Präsenz nichtlinearer Materialien die Lösung mehrerer linearer Gleichungssysteme innerhalb jedes Zeitschritts. Um die Vorteile der neuesten Entwicklungen in Richtung von Rechnern mit mehreren Prozessoren und Rechenkernen hinsichtlich der Reduktion der Simulationszeit nutzen zu können, ist die Parallelisierung bestehender Algorithmen erforderlich. Wird dies effizient implementiert, ergibt sich, ohne Änderungen am Verfahren selbst, eine verkürzte Simulationszeit bei gleicher Modellgröße. Weiterhin wird in bestimmten Fällen durch die größere Menge an verfügbarem Arbeitsspeicher eine Simulation überhaupt erst möglich.
- *Hybridisierung*: Das starke Anwachsen der Simulationsdauer beim Übergang zu komplexeren Modellen ist in den meisten Fällen auf das Anwachsen der zur numerischen Beschreibung erforderlichen Anzahl an Freiheitsgraden zurückzuführen. Unter Berücksichtigung spezieller, in Teilen des zu betrachtenden Modells vorhandener räumlicher Symmetrien, können problemangepasste Diskretisierungsverfahren definiert werden. Diese versprechen, ohne eine Vereinfachung der zugrundeliegenden physikalischen Modellierung, eine signifikante Verkürzung der Simulationsdauer über eine Reduktion der Anzahl der zum Erreichen einer vorgegebenen Genauigkeit erforderlichen Freiheitsgrade.

Anhand des Beispiels des im Rahmen des FAIR-Projektes der GSI zum Einsatz im Synchrotron SIS-100 vorgesehenen supraleitenden Dipolmagneten wurden numerische Simulationen unter Verfolgung der erstgenannten Strategie durchgeführt. Im Vordergrund stand dabei die Bestimmung der zu erwartenden Wirbelstromverluste in Verbindung mit der im Betrieb gegebenen zeitlichen Änderung der magnetischen Flussdichte. Das komplexe Materialverhalten des ferromagnetischen Magnetjochs, welches durch den erforderlichen hohen Maximalwert der magnetischen Flussdichte ein Sättigungsverhalten zeigt sowie durch den Aufbau aus lamellierten Blechen eine Anisotropie aufweist, wurde über geeignete Materialmodelle in die Simulationen einbezogen. Die Parallelisierung der Methode der Finiten Elemente in Verbindung mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung ermöglicht eine Bestimmung der relevanten Zielgrößen in einem akzeptablen Zeitrahmen. Erst durch den Einsatz von Approximationsvorschriften höherer Ordnung ist die von der Anwendung geforderte Genauigkeitsschranke erreichbar. Im Fall der häufig eingesetzten Ansatzfunktionen niedrigster Ordnung wären dazu aufgrund der langsamen Konvergenzrate weitaus mehr als zehn Millionen Gitterzellen erforderlich. Die daraus resultierenden numerischen Modelle sind derzeit in Verbindung mit unstrukturierten Gittern auch unter Verwendung von Parallelisierungsstrategien nicht mit akzeptablem Zeit- und Kostenaufwand lösbar.

Der umgekehrte Weg zur Reduktion der erforderlichen Zeit für die numerische Simulation elektromagnetischer Vorgänge wurde mit der Entwicklung eines hybriden Diskretisierungsverfahrens eingeschlagen. Dieses basiert auf einer räumlichen Zerlegung des betrachteten Volumens unter besonderer Berücksichtigung von in Teilen des Modells gegebenen kontinuierlichen Symmetrien. In diesen Bereichen erfolgt eine Darstellung der enthaltenen Strukturen in einer reduzierten räumlichen Dimensionalität. Dies führt zu einer Verringerung der Komplexitätsordnung der Modellierung. Auf diesem Gebiet kommen spezielle Ansatzfunktionen zur Diskretisierung zum Einsatz, welche über die Bildung von Tensorprodukten herkömmlicher Finite-Elemente-Ansatzfunktionen mit geeigneten Spektralelementen in Form orthogonaler Polynome in der Richtung der Symmetrie definiert sind. Auf diesem Weg erfolgt eine vollständig dreidimensionale Modellierung der elektromagnetischen Felder auf der Basis einer zweidimensionalen geometrischen Darstellung. Der eingesetzte Gebietszerlegungsansatz garantiert eine starke Kopplung zu umgebenden Bereichen unter Beachtung der physikalischen Stetigkeitsanforderungen und führt zu einem breiten Anwendungsspektrum der entwickelten Methode. Die aus der Diskretisierung entstehenden Gleichungssysteme weisen eine geringere Dimension auf, sind jedoch im Vergleich zu herkömmlichen Verfahren dichter besetzt. Weiterhin ergeben sich durch die eingesetzte Kopplung über Lagrange-Multiplikatoren indefinite Gleichungssysteme. Im Fall einer knotenbasierten Potentialformulierung können direkte Verfahren aufgrund der reduzierten Modellgröße effizient zur Lösung eingesetzt werden. Demgegenüber ist bei den aus der

Diskretisierung der singulären Helmholtzgleichung resultierenden Systemen die Anwendung iterativer Verfahren in Verbindung mit speziellen Vorkonditionierern erforderlich. Für den skalaren Fall wurden die vorteilhaften Eigenschaften der Methode anhand der Simulation des Isolationsverhaltens eines Hochspannungstransformators sowie am Beispiel des SIS-100-Magneten demonstriert. Die Vorteile der hybriden Modellierung zeigen sich insbesondere bei der Anwendung auf Modelle, innerhalb derer der Bereich kontinuierlicher Symmetrie groß gegenüber dem verbleibenden Volumen ausfällt. In diesem Fall ist eine Verringerung der Anzahl erforderlicher Freiheitsgrade um bis zu zwei Größenordnungen erreichbar. Dabei ist anzumerken, dass der erzielte Vorteil teilweise durch die negativen numerischen Eigenschaften der entstehenden Gleichungssysteme kompensiert werden kann.

Das im Rahmen dieser Arbeit entstandene Simulationswerkzeug auf der Basis der Methode der Finiten Elemente ist dank der Schnittstelle zu kommerziellen Programmen flexibel einsetzbar. Die eingebundenen Ansatzfunktionen erlauben die Verwendung höherer Approximationsordnungen, die in vielen Bereichen erforderlich sind, um eine gewünschte Genauigkeitsschranke zu erreichen. Insbesondere für die Vorkonditionierung konsistent singulärer Gleichungssysteme kann derzeit jedoch nur im Fall niedrigster Ordnung ein leistungsstarkes algebraisches Mehrgitterverfahren eingesetzt werden. Die Entwicklung geeigneter Verfahren zur effizienten Vorkonditionierung der aus der Diskretisierung unter Verwendung von Ansatzfunktionen höherer Ordnung entstehenden Systeme stellt daher ein Gebiet für weiterführende Untersuchungen dar. Desweiteren bieten bei nicht planar bearbeiteten Objekten erst Elemente quadratischer räumlicher Ordnung die gewünschte hohe Konvergenzrate. Die Implementierung dieser verbesserten Modellierung würde zu einer weiter verbesserten Simulationsgenauigkeit führen.

Im Fall des hybriden Diskretisierungsverfahrens müssen die Symmetriebereiche von außen vorgegeben werden. Ein Algorithmus zur automatischen Identifizierung geeigneter Bereiche zur Anwendung der räumlichen Modellierung reduzierter Dimension stellt eine mögliche Richtung zur weiteren Forschung dar. Ein weitaus interessanteres und ebenso wichtiges Gebiet ist mit der Entwicklung eines speziellen Verfahrens zur Vorkonditionierung der entstehenden indefiniten Systeme, insbesondere im Fall der vektoriellen Formulierung, gegeben. Weiterhin könnte die gekoppelte Methode auch in anderen als den bisher betrachteten Bereichen, beispielsweise zur Simulation langer elektrischer Maschinen eingesetzt werden. In der im Rahmen dieser Arbeit dargelegten Notation ist ebenfalls eine Erweiterung auf die Berücksichtigung einer entlang der Symmetrierichtung gekrümmten Koordinate, welche senkrecht auf den zwei verbleibenden Raumrichtungen steht, denkbar.

A Verwendete Abkürzungen

AMG	–	algebraisches Mehrgitterverfahren zur Lösung oder Vorkonditionierung großer linearer Gleichungssysteme
BDF(k)	–	implizites Verfahren zur Zeitintegration der Ordnung k (engl. „ <i>backward differentiation formula</i> “)
BDF(1)	–	implizites Euler-Verfahren zur Zeitintegration der Ordnung 1
CAD	–	rechnergestützter Entwurf (engl. „ <i>computer aided design</i> “)
DAE	–	differential-algebraische Gleichung (engl. „ <i>differential-algebraic equation</i> “)
DFT	–	diskrete Fouriertransformation
DKT	–	diskrete Kosinustransformation als Spezialfall der DFT
FAIR	–	engl. „ <i>Facility for Antiproton and Ion Research</i> “
FE	–	Finite Elemente
FEM	–	Methode der Finiten Elemente
FESE	–	hybrides Diskretisierungsverfahren unter Verwendung der Methode der Finiten Elemente (FE) in Verbindung mit Spektralmethoden (SE)
FFT	–	schnelle Fouriertransformation (engl. „ <i>fast Fourier transform</i> “)
FIT	–	Methode der Finiten Integration (engl. „ <i>Finite Integration Technique</i> “)
GiB	–	Gigabyte: 1 GiB entspricht 2^{30} B (Byte, engl. „ <i>byte</i> “)
GSI	–	GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH, Darmstadt
HGÜ	–	Hochspannungs-Gleichstromübertragung
MSP	–	magnetisches Skalarpotential
MVP	–	magnetisches Vektorpotential
ODE	–	gewöhnliche Differentialgleichung (engl. „ <i>ordinary differential equation</i> “)
SE	–	Spektralelemente
SIS-100	–	Schwerionensynchrotron am GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung

B Notation

Klassische Elektrodynamik

\vec{r}	– Ortsvektor
\vec{n}	– Normalenvektor einer Fläche
t	– Zeit
W	– Energie
P	– Leistung
$\vec{E}(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r}, t)$	– elektrische Feldstärke (orts- und zeitabhängig)
$\vec{D}(\vec{r}), \vec{D}(\vec{r}, t)$	– dielektrische Verschiebungsdichte (orts- und zeitabhängig)
$\vec{H}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r}, t)$	– magnetische Feldstärke (orts- und zeitabhängig)
$\vec{B}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r}, t)$	– magnetische Flussdichte (orts- und zeitabhängig)
$\vec{B}_r(\vec{r}), \vec{B}_r(\vec{r}, t)$	– magnetische Remanenz (orts- und zeitabhängig)
$\vec{J}(\vec{r}), \vec{J}(\vec{r}, t)$	– elektrische Stromdichte (orts- und zeitabhängig)
$\vec{J}_e(\vec{r}), \vec{J}_e(\vec{r}, t)$	– eingeprägte elektrische Stromdichte (orts- und zeitabhängig)
$\vec{J}_l(\vec{r}), \vec{J}_l(\vec{r}, t)$	– elektrische Leitungsstromdichte (orts- und zeitabhängig)
\vec{J}_F	– Flächenstromdichte (Strombelag)
$\vec{P}_e(\vec{r}), \vec{P}_e(\vec{r}, t)$	– elektrische Polarisationsdichte (orts- und zeitabhängig)
$\varrho(\vec{r}), \varrho(\vec{r}, t)$	– elektrische Raumladungsdichte (orts- und zeitabhängig)
ϱ_F	– Oberflächenladungsdichte (Ladungsbelag)
$\varepsilon, \bar{\varepsilon}, \bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{E}(\vec{r}))$	– elektrische Permittivität (tensorwertig und feldabhängig)
$\mu, \bar{\mu}, \bar{\bar{\mu}}(\vec{H}(\vec{r}))$	– magnetische Permeabilität (tensorwertig und feldabhängig)
$\sigma, \bar{\sigma}, \bar{\bar{\sigma}}(\vec{E}(\vec{r}))$	– elektrische Leitfähigkeit (tensorwertig und feldabhängig)
$\varepsilon_0, \mu_0, \nu_0$	– Materialkoeffizienten des Vakuums, wobei $\nu_0 = 1/\mu_0$
ε_r, μ_r	– relative Materialkoeffizienten bezüglich der Vakuumwerte
c_0	– Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ($c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$)
\vec{A}	– magnetisches Vektorpotential

\vec{A}_r	– reduziertes magnetisches Vektorpotential
\vec{A}^*	– modifiziertes magnetisches Vektorpotential
\vec{T}	– elektrisches Vektorpotential
\vec{T}^*	– modifiziertes elektrisches Vektorpotential
ϕ	– (totales) elektrisches Skalarpotential
ϕ_m	– totales magnetisches Skalarpotential
ψ_m	– reduziertes magnetisches Skalarpotential
\vec{H}_w	– wirbelfreier Anteil der magnetischen Feldstärke
\vec{H}_s	– wirbelbehafteter Anteil der magnetischen Feldstärke
\vec{v}	– Vektor der Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen bei der Ausbreitung in Medien
τ_{em}	– elektromagnetische Durchgangszeit
τ_e	– Ladungsrelaxationszeit
$\tau_{e,min}, \tau_{e,max}$	– minimale und maximale Ladungsrelaxationszeit
τ_m	– magnetische Diffusionszeit
$\tau_{m,min}, \tau_{m,max}$	– minimale und maximale magnetische Diffusionszeit
τ	– charakteristische Zeitkonstante der Anregung
$\nabla_F \cdot$	– Operator zur Bildung der Oberflächendivergenz
Ω	– allgemeines Volumen
Ω_σ	– Untergebiet des betrachteten Volumens, in dem $\sigma \neq 0$ gilt
l_Ω	– Raumdiagonale des betrachteten Volumens Ω

Methode der Finiten Integration

G	– primäres Gitter
\tilde{G}	– duales Gitter
\hat{e}	– elektrische Gitterspannung
$\hat{\hat{d}}$	– dielektrischer Gitterfluss
\hat{h}	– magnetische Gitterspannung
$\hat{\hat{b}}$	– magnetischer Gitterfluss
\hat{j}	– elektrischer Gitterstrom
\vec{e}	– Vektor der elektrischen Gitterspannungen
$\vec{\hat{d}}$	– Vektor der dielektrischen Gitterflüsse

$\widehat{\mathbf{h}}$	– Vektor der magnetischen Gitterspannungen
$\widehat{\widehat{\mathbf{b}}}$	– Vektor der magnetischen Gitterflüsse
$\widehat{\widehat{\mathbf{j}}}$	– Vektor der elektrischen Gitterströme
$\widehat{\widehat{\mathbf{j}}}_e$	– Vektor der extern eingeprägten elektrischen Gitterströme
\mathbf{q}	– Vektor der elektrischen Gitterladungen
\mathbf{M}_ε	– Matrix zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen $\widehat{\widehat{\mathbf{d}}}$ und $\widehat{\mathbf{e}}$
$\mathbf{M}_\sigma, \mathbf{M}_\sigma^{\text{FIT}}$	– Matrix zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen $\widehat{\widehat{\mathbf{j}}}$ und $\widehat{\mathbf{e}}$
$\mathbf{M}_\nu, \mathbf{M}_\nu^{\text{FIT}}$	– Matrix zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen $\widehat{\mathbf{h}}$ und $\widehat{\widehat{\mathbf{b}}}$
$\mathbf{M}_{\nu,c}$	– Sehnreluktivitätsmatrix im Rahmen nichtlinearer Lösungsverfahren
$\mathbf{C}, \widetilde{\mathbf{C}}$	– diskrete Entsprechungen des analytischen Rotationsoperators auf dem primären und dualen Gitter
$\mathbf{S}, \widetilde{\mathbf{S}}$	– diskrete Entsprechungen des analytischen Divergenzoperators auf dem primären und dualen Gitter
$\mathbf{G}, \widetilde{\mathbf{G}}$	– diskrete Entsprechungen des analytischen Gradientenoperators auf dem primären und dualen Gitter
N_p	– Anzahl primärer sowie dualer Gitterpunkte
P_ξ, \widetilde{P}_ξ	– Knoten im primären beziehungsweise dualen Gitter mit dem kanonischen Index ξ
$L_\xi^{(\chi)}, \widetilde{L}_\xi^{(\chi)}$	– Länge einer primären beziehungsweise dualen Gitterkante in χ -Richtung mit dem kanonischen Index ξ
$A_\xi^{(\chi)}, \widetilde{A}_\xi^{(\chi)}$	– Inhalt einer primären beziehungsweise dualen Gitterfläche in χ -Richtung mit dem kanonischen Index ξ
V_ξ, \widetilde{V}_ξ	– Volumen einer primären beziehungsweise dualen Gitterzelle
$\overline{\varepsilon}$	– mittlere Permittivität (bei einer Flächenmittelung)
$\overline{\nu}$	– mittlere Reluktivität (bei inverser Längenmittelung)

Methode der Finiten Elemente

$L_\xi^{(n[e,f,v],I,p)}$	– skalare interpolatorische Ansatzfunktionen vom Lagrange-Typ mit dem Index ξ sowie der Approximationsordnung p , die mit Knoten (n), Kanten (e), Flächen (f) oder Volumen (v) eines Tetraeders assoziiert sind.
$L_\xi^{(n,I,1)}$	– knotenbasierte skalare interpolatorische Ansatzfunktionen erster Ordnung vom Lagrange-Typ mit dem Index ξ

$L_{\xi}^{(n[e,f,v],H,p)}$	– skalare hierarchische Ansatzfunktionen mit dem Index ξ sowie der Approximationsordnung p , die mit Knoten (n), Kanten (e), Flächen (f) oder Volumen (v) eines Tetraeders assoziiert sind.
$w_i^{s,(p)}$	– skalare Ansatzfunktion der Approximationsordnung p zum Gitterknoten mit dem Index i
$\vec{w}_k^{tv,(p)}$	– tangential stetige vektorielle Ansatzfunktion der Approximationsordnung p zur Gitterkante mit dem Index k , welche die Knoten i und j verbindet
$\vec{w}_l^{nv,(p)}$	– normal stetige vektorielle Ansatzfunktion der Approximationsordnung p zur Gitterfläche mit dem Index l , welche die Knoten i , j und k enthält
$w_n^{ch,(p)}$	– volumenbasierte skalare Ansatzfunktion der Approximationsordnung p zum Volumen n , die über Elementgrenzen hinweg einen un-stetigen Verlauf zeigt.
λ_{ξ}	– Volumen- oder Flächenkoordinate des zugehörigen Knotens ξ
$\mathcal{P}_{s[tv,nv,ch]}^{(p)}$	– Funktionenräume zur Ordnung p , die von skalaren (s), tangential stetigen (tv), normal stetigen (nv) oder ladungsbasierten Ansatzfunktionen aufgespannt werden.
$\mathcal{P}_{tv,grad}^{(p)}$	– Funktionenraum tangential stetiger Vektorfunktionen zur Ordnung p , der von rotationsfreien Ansatzfunktionen aufgespannt wird; Erstellung durch die Bildung des Gradienten des skalaren Funktionenraumes $\mathcal{P}_s^{(p+1)}$ der Ordnung $p+1$
$\mathcal{P}_{tv,rot}^{(p)}$	– Funktionenraum tangential stetiger Vektorfunktionen zur Ordnung p , der von divergenzfreien Ansatzfunktionen aufgespannt wird; die Rotation der enthaltenen Ansatzfunktionen wird mit der exakten Ordnung p dargestellt
$\mathcal{P}_{nv,rot}^{(p)}$	– Funktionenraum normal stetiger Vektorfunktionen zur Ordnung p , der von divergenzfreien Ansatzfunktionen aufgespannt wird; die Rotation der enthaltenen Ansatzfunktionen wird mit der exakten Ordnung p dargestellt
$\mathcal{P}_{nv,div}^{(p)}$	– Funktionenraum normal stetiger Vektorfunktionen zur Ordnung p , der von rotationsfreien Ansatzfunktionen aufgespannt wird; die Divergenz der enthaltenen Ansatzfunktionen wird mit der exakten Ordnung p dargestellt
$\mathbf{K}_{\varepsilon}^s, \mathbf{K}_{\nu}^{tv}$	– Steifigkeitsmatrizen, die bei der Diskretisierung schwacher Formulierungen von Differentialgleichungen auftreten

$\mathbf{M}_\sigma^s, \mathbf{M}_\sigma^{tv}$	– Massenmatrizen, welche bei der Diskretisierung transienter Problemstellungen in der schwachen Formulierung auftreten
$\mathbf{g}_\xi^{s,tv}$	– aus den Randintegraltermen der schwachen Formulierung resultierende Vektoren, die mit dem Materialparameter ξ verbunden sind
$\mathbf{K}_{\nu,d}$	– differentielle Reluktivitätsmatrix
$\mathbf{K}_{\nu,c}$	– Sehnen-Reluktivitätsmatrix
$\mathbf{K}_{\nu,inc}$	– inkrementelle Reluktivitätsmatrix
\mathbf{u}	– Vektor der Freiheitsgrade für das elektrische oder magnetische Skalarpotential
\mathbf{a}	– Vektor der Freiheitsgrade für das magnetische Vektorpotential
\mathbf{j}_e	– Vektor der Freiheitsgrade für die eingeprägte Stromdichte bei magnetoquasistatischen Problemstellungen
Γ_d	– Teilmenge der Berandung eines Rechengebietes, auf welcher eine Dirichlet-Randbedingung vorgegeben wird
Γ_n	– Teilmenge der Berandung eines Rechengebietes, auf welcher eine Neumann-Randbedingung vorgegeben wird

Magnetsimulationen

δ_e	– äquivalente Leitschichtdicke
$\lambda_e = 2\pi\delta_e$	– Eindringtiefe
γ_{pk}	– Packungsfaktor: Bezeichnet den Volumenanteil von Eisen an einem aus lamellierten Blechen aufgebauten Verbundmaterial
P_v	– analytische Definition der in einem gegebenen Volumen erzeugten Verlustleistung
$P_{v,dis}$	– über numerische Verfahren berechneter Wert für die Verlustleistung
ϵ_{nlin}	– Residuum des nichtlinearen Lösungsprozesses, welches als Abbruchkriterium für die Iteration herangezogen wird
\hat{a}_n, \hat{b}_n	– Koeffizienten zur Angabe der schiefsymmetrischen beziehungsweise normalen Polstärke bei einer planaren Multipolentwicklung
b_n	– absoluter Multipolkoeffizient der Ordnung n , der zur Bewertung der Feldhomogenität in Magneten herangezogen wird
b_n/b_1	– relativer Multipolkoeffizient der Ordnung n bezogen auf den Dipolkoeffizienten, der die Abweichung von dem gewünschten Zustand eines homogenen Feldes angibt

b_n^{int}	– relativer integraler Multipolkoeffizient der Ordnung n bezogen auf den Dipolkoeffizienten, über den eine Extrapolation der zu erwartenden Homogenität der magnetischen Flussdichte in langen Magneten bestimmt werden kann
ϵ_{err}	– relativer Fehler einer numerischen Lösung gegenüber einer Referenzlösung
η	– Simulationsgeschwindigkeit bei parallelisierten Berechnungen
η_{rel}	– relative Simulationsgeschwindigkeit bei parallelisierten Berechnungen bezogen auf die Anzahl verwendeter Rechenprozesse

Hybride Diskretisierung

P_q	– Element q aus der eingesetzten Menge orthogonaler Polynome zur Diskretisierung in der Symmetrierichtung
$v_i^{\text{s,fese}}$	– hybride Ansatzfunktion zur Diskretisierung skalarer Problemstellungen
$\vec{v}_{i,j}^{\text{tv,fese,uv}}$	– hybride vektorielle Ansatzfunktion zur Diskretisierung innerhalb des Symmetriegebietes, die in der Ebene definiert ist
$\vec{v}_{i,j}^{\text{tv,fese,w}}$	– hybride vektorielle Ansatzfunktion, die orthogonal zu $\vec{v}_{i,j}^{\text{tv,fese,uv}}$ ist und gemeinsam mit dieser zur Diskretisierung eingesetzt wird
$\mathbf{F}_{\text{SE}}^{\text{L,C,F}}$	– Differentiationsmatrix im Koeffizientenraum für Legendre- (L), Tschebyscheff- (C) oder trigonometrische Funktionen (F)
$\mathbf{G}_{\text{SE}}^{\text{L,C,F}}$	– Gradientenoperator bei Spektralverfahren für Legendre- (L), Tschebyscheff- (C) oder trigonometrische Funktionen (F)
$\mathbf{K}_{\text{SE}}^{\text{L,C,F}}$	– Aus der spektralen Diskretisierung mit Legendre- (L), Tschebyscheff- (C) oder trigonometrischen (F) Polynomen resultierende Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{M}_{\text{SE}}^{\text{L,C,F}}$	– Massenmatrix bezüglich der Diskretisierung mit Legendre- (L), Tschebyscheff- (C) oder trigonometrischen (F) Polynomen
$\mathbf{L}_{\text{SE}}^{\text{L,C,F}}$	– Kopplungsterm, der zu der hybriden Steifigkeitsmatrix beiträgt für eine Diskretisierung mit Legendre- (L), Tschebyscheff- (C) oder trigonometrischen (F) Polynomen
$\mathbf{K}^{\text{s[tv],fese}}$	– globale Steifigkeitsmatrix für den Symmetriebereich bei skalaren oder tangential stetigen vektoriellen Ansatzfunktionen
$\mathbf{M}^{\text{s[tv],fese}}$	– globale Massenmatrix für den Symmetriebereich bei skalaren oder tangential stetigen vektoriellen Ansatzfunktionen

$\mathbf{Q}_{3d}, \mathbf{Q}_{fese}$	– Selektionsmatrizen, die aus dem jeweiligen Gebiet die Freiheitsgrade auf der gemeinsamen Schnittfläche liefern
Ω	– gesamtes betrachtetes Volumen
Ω_{3d}, Ω_2	– Anteil des Gesamtvolumens Ω , welcher keine nutzbaren Symmetrien beinhaltet
$\Omega_{2d}^{xy}, \Omega_{2d}^{rz}$	– zweidimensionale Fläche zur Anwendung entsprechender Approximationen reduzierter Dimension
Ω_s, Ω_1	– Teilgebiet von Ω , welches eine kontinuierliche Symmetrie aufweist
ℓ_z	– charakteristische Länge einer gegebenen Anordnung bei der Ausnutzung einer kontinuierlichen kartesischen Symmetrie
f_w, f_s	– Faktoren, die sich in Abhängigkeit von der behandelten kontinuierlichen Symmetrie ergeben
\mathbf{m}_{3d}	– Vektor, welcher die Lagrange-Multiplikatoren, die bei der Kopplung der separaten Gebiete auftreten, beinhaltet
Γ_{int}	– Schnittfläche, welche den separaten Gebieten gemeinsam ist

Literaturverzeichnis

- [1] JAMES CLERK MAXWELL: *A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol I.* Oxford University Press, London, 1873. (Zitiert auf Seite 5.)
- [2] JAMES CLERK MAXWELL: *A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol II.* Oxford University Press, London, 1873. (Zitiert auf Seite 5.)
- [3] ELLEN IVERS-TIFFÉE und WALDEMAR VON MÜNCH: *Werkstoffe der Elektrotechnik.* B.G. Teubner Verlag, Stuttgart / Leipzig / Wiesbaden, 9. Auflage, 2004, ISBN 3-519-30115-6. (Zitiert auf Seite 6.)
- [4] JOHN DAVID JACKSON: *Klassische Elektrodynamik.* Walter de Gruyter, 2002. (Zitiert auf den Seiten 6, 8, 14 und 15.)
- [5] EDWARD J. ROTHWELL and MICHAEL J. CLOUD: *Electromagnetics.* CRC Press, 2001. (Zitiert auf den Seiten 7 und 8.)
- [6] HORST CLAUSERT und GUNTHER WIESEMANN: *Grundgebiete der Elektrotechnik 1.* R. Oldenbourg Verlag, München / Wien, 6. Auflage, 1993, ISBN 3-486-22609-6. (Zitiert auf Seite 7.)
- [7] HERMANN A. HAUS and JAMES R. MELCHER: *Electromagnetic Fields and Energy.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1989, ISBN 0-13-249020-X. (Zitiert auf den Seiten 8, 9 und 10.)
- [8] MARKUS WILKE: *Zur numerischen Berechnung quasistationärer elektromagnetischer Felder im Zeitbereich.* Dissertation, Technische Universität Darmstadt, Göttingen, 2005. (Zitiert auf den Seiten 11 und 80.)
- [9] GALINA BENDERSKAYA: *Numerical Methods for Transient Field-Circuit Coupled Simulations Based on the Finite Integration Technique and a Mixed Circuit Formulation.* PhD thesis, Technische Universität Darmstadt, 2007. (Zitiert auf den Seiten 11, 78 und 80.)
- [10] H.K. DIRKS: *Quasi-stationary fields for microelectronic applications.* Electrical Engineering, 79(2):145–155, April 1996. (Zitiert auf Seite 11.)
- [11] K. SCHMIDT, O. STERZ, and R. HIPTMAIR: *Estimating the Eddy-Current Modeling*

- Error*. IEEE Transactions on Magnetics, 44(6):686–689, June 2008. (Zitiert auf Seite 12.)
- [12] W. MÜLLER und W. WOLFF: *Numerische Berechnung dreidimensionaler Magnetfelder für große Turbogeneratoren bei feldabhängiger Permeabilität und beliebiger Stromdichteverteilung*. Elektrotechnische Zeitschrift A (ETZ), 94:276–282, 1973. (Zitiert auf Seite 15.)
- [13] J. SIMKIN and C.W. TROWBRIDGE: *On the Use of the Total Scalar Potential in the Numerical Solution of Field Problems in Electromagnetics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14(3):423–440, June 1979. (Zitiert auf den Seiten 15 und 16.)
- [14] W. MÜLLER und W. WOLFF: *Beitrag zur numerischen Berechnung von Magnetfeldern*. Elektrotechnische Zeitschrift A (ETZ), 96(6):269–273, 1975. (Zitiert auf Seite 16.)
- [15] M. L. BROWN: *Scalar potentials in multiply connected regions*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20(4):665–680, April 1984. (Zitiert auf Seite 16.)
- [16] A. BARCHANSKI, M. CLEMENS, E. GJONAJ, H. DE GERSEM, and T. WEILAND: *Large-scale calculation of low-frequency-induced currents in high-resolution human body models*. IEEE Transactions on Magnetics, 43(4):1693–1696, April 2007. (Zitiert auf Seite 16.)
- [17] ANDREAS BARCHANSKI: *Simulations of Low-Frequency Electromagnetic Fields in the Human Body*. PhD thesis, Technische Universität Darmstadt, 2007. (Zitiert auf Seite 16.)
- [18] H. SONG and N. IDA: *An Eddy-Current Formulation for 3D Electromagnetic Field Calculations*. IEEE Transactions on Magnetics, 27(5):4012–4015, September 1991. (Zitiert auf Seite 18.)
- [19] C.F. BRYANT, C.R.I. EMSON, and C.W. TROWBRIDGE: *A Comparison of Lorenz Gauge Formulations in Eddy Current Computations*. IEEE Transactions on Magnetics, 26(2):430–433, March 1990. (Zitiert auf Seite 18.)
- [20] A. BOSSAVIT: *On the Lorenz gauge*. COMPEL, 18(3):323–336, 1999. (Zitiert auf Seite 18.)
- [21] J.D. JACKSON: *From Lorenz to Coulomb and other explicit gauge transformations*. American Journal of Physics, 70(9):917–928, September 2002. (Zitiert auf Seite 18.)
- [22] C.R.I. EMSON and J. SIMKIN: *An Optimal Method for 3-D Eddy Currents*. IEEE

- Transactions on Magnetism, MAG-19(6):2450–2452, November 1983. (Zitiert auf den Seiten 18 und 20.)
- [23] R. ALBANESE and G. RUBINACCI: *Formulation of the eddy-current problem*. IEE Proceedings A, Science, Measurement & Technology, 137(1):16–22, January 1990. (Zitiert auf Seite 19.)
- [24] C.J. CARPENTER: *Comparison of alternative formulations of 3-dimensional magnetic-field and eddy-current problems at power frequencies*. Proceedings IEE, 124(11):492–497, November 1977. (Zitiert auf den Seiten 19 und 20.)
- [25] T. WEILAND: *Zur Berechnung der Wirbelströme in beliebig geformten, lamellierten, dreidimensionalen Eisenkörpern Teil I: Die Methode*. Archiv für Elektrotechnik, 60(6):345–351, November 1978. (Zitiert auf den Seiten 20 und 27.)
- [26] C.S. BIDDLECOMBE, E.A. HEIGHWAY, J. SIMKIN, and C.W. TROWBRIDGE: *Methods for Eddy Current Computation in Three Dimensions*. IEEE Transactions on Magnetism, MAG-18(2):492–497, March 1982. (Zitiert auf Seite 20.)
- [27] W. RENHART, H. STÖGNER, and K. PREIS: *Calculation of 3D eddy current problems by finite element method using either an electric or a magnetic vector potential*. IEEE Transactions on Magnetism, 24(1):122–125, January 1988. (Zitiert auf Seite 20.)
- [28] A. KAMEARI: *Three dimensional eddy current calculation using finite element method with $A-V$ in conductor and Ω in vacuum*. IEEE Transactions on Magnetism, 24(1):118–121, January 1988. (Zitiert auf Seite 20.)
- [29] R.D. PILLSBURY, JR.: *A three dimensional eddy-current formulation using two potentials: The magnetic vector potential and the total magnetic scalar potential*. IEEE Transactions on Magnetism, MAG-19(6):2284–2287, November 1983. (Zitiert auf Seite 20.)
- [30] T.W. PRESTON and A.B.J. REECE: *Solution of 3-dimensional eddy current problems: The $T - \Omega$ -Method*. IEEE Transactions on Magnetism, MAG-18(2):486–491, March 1982. (Zitiert auf Seite 20.)
- [31] T. NAKATA, N. TAKAHASHI, K. FUJIWARA, and Y. OKADA: *Improvements of the $T - \Omega$ -Method for 3-D eddy current analysis*. IEEE Transactions on Magnetism, 24(1):94–97, January 1988. (Zitiert auf Seite 20.)
- [32] O. BÍRÓ and K. PREIS: *On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents*. IEEE Transactions on Magnetism, 25(4):3145–3159, July 1989. (Zitiert auf den Seiten 21 und 52.)

- [33] O. BÍRÓ and K. PREIS: *Finite Element Analysis of 3-D Eddy Currents*. IEEE Transactions on Magnetics, 26(2):418–423, March 1990. (Zitiert auf den Seiten 21 und 24.)
- [34] Z. REN and A. RAZEK: *Comparison of Some 3D Eddy Current Formulations in Dual Systems*. IEEE Transactions on Magnetics, 36(4):751–755, July 2000. (Zitiert auf Seite 21.)
- [35] ARNOLD SOMMERFELD: *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band VI*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G., Leipzig, 1947. (Zitiert auf Seite 21.)
- [36] ASLAK TVEITO und RAGNAR WINTHER: *Einführung in partielle Differentialgleichungen: Ein numerischer Zugang*. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 2002, ISBN 3-540-42404-0. (Zitiert auf den Seiten 21, 22 und 59.)
- [37] Q. CHEN and A. KONRAD: *A Review of Finite Element Open Boundary Techniques for Static and Quasi-Static Electromagnetic Field Problems*. IEEE Transactions on Magnetics, 33(1):663–676, January 1997. (Zitiert auf Seite 22.)
- [38] T. WEILAND: *Eine Methode zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen für sechskomponentige Felder auf diskreter Basis*. Electronics and Communication (AEÜ), 31(3):116–120, März 1977. (Zitiert auf Seite 27.)
- [39] T. WEILAND: *Time domain electromagnetic field computation with finite difference methods*. International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, 9(4):295–319, July 1996. (Zitiert auf Seite 27.)
- [40] MARKUS CLEMENS and THOMAS WEILAND: *Numerical algorithms for the FDiTD and FDFD simulation of slowly varying electromagnetic fields*. International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, 12(1-2):3–22, January 1999. (Zitiert auf Seite 27.)
- [41] R. SCHUHMANN and T. WEILAND: *A stable interpolation technique for FDTD on non-orthogonal grids*. International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, 11(6):299–306, November 1998. (Zitiert auf Seite 27.)
- [42] TIMO EULER: *Consistent Discretization of Maxwell's Equations on Polyhedral Grids*. PhD thesis, Technische Universität Darmstadt, 2007. (Zitiert auf den Seiten 27 und 42.)
- [43] U. VAN RIENEN and T. WEILAND: *Triangular discretization method for the evaluation of RF-fields in cylindrically symmetric cavities*. IEEE Transactions on Magnetics, MAG-21(6):2317–2320, November 1985. (Zitiert auf Seite 27.)
- [44] T. WEILAND: *Verlustbehaftete Wellenleiter mit beliebiger Randkontur und Material-*

- belegung*. Electronics and Communication (AEÜ), 33(4):170–174, April 1979. (Zitiert auf Seite 35.)
- [45] MARTIN SCHAUER: *Ein Beitrag zur Simulation statischer und niederfrequenter Felder in nichtlinearen und hochpermeablen Materialien*. WP Druck & Verlag, Darmstadt, 2005. (Zitiert auf Seite 40.)
- [46] STEFAN FEIGH: *Ein geometrisches Diskretisierungs- und Lösungsverfahren auf der Basis der Finiten-Integrations-Methode*. Cuvillier Verlag, Göttingen, 2006. (Zitiert auf Seite 40.)
- [47] HOLGER SPACHMANN: *Die Methode der Finiten Integration höherer Ordnung zur numerischen Berechnung elektromagnetischer Felder*. Shaker Verlag, Aachen, 2003. (Zitiert auf Seite 40.)
- [48] M. CLEMENS and T. WEILAND: *Discrete electromagnetism with the Finite Integration Technique*. Progress In Electromagnetics Research, 32:65–87, 2001. (Zitiert auf Seite 41.)
- [49] MICHA DEHLER: *Numerische Lösung der Maxwellschen Gleichungen auf kreiszylindrischen Gittern*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 1993. (Zitiert auf Seite 41.)
- [50] T. WEILAND: *On the unique numerical solution of Maxwellian eigenvalue problems in three dimensions*. Particle Accelerators (PAC), 17:227–242, 1985. (Zitiert auf Seite 42.)
- [51] R. SCHUHMANN and T. WEILAND: *Conservation of discrete energy and related laws in the Finite Integration Technique*. Progress In Electromagnetics Research, 32:301–316, 2001. (Zitiert auf den Seiten 42 und 109.)
- [52] R.W. CLOUGH: *The finite element method in plane stress analysis*. In *Proceedings, 2nd Conference on Electronic Computation, A.S.C.E. Structural Division*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, September 1960. (Zitiert auf Seite 43.)
- [53] J.H. ARGYRIS: *Tetrahedron elements with linearly varying strain for matrix displacement method*. Journal of the Royal Aeronautical Society, 69(660):877–890, 1965. (Zitiert auf Seite 43.)
- [54] O.C. ZIENKIEWICZ and Y.K. CHEUNG: *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. McGraw-Hill Publishing Company Limited, Berkshire, England, 1967. (Zitiert auf Seite 43.)
- [55] K.J. BATHE and E.L. WILSON: *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1976. (Zitiert auf Seite 43.)

- [56] P. SILVESTER: *A general high-order finite-element waveguide analysis program*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-17(4):204–210, April 1969. (Zitiert auf Seite 43.)
- [57] P. SILVESTER and M.V.K. CHARI: *Finite element solution of saturable magnetic field problems*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-89(7):1642–1651, September 1970. (Zitiert auf Seite 43.)
- [58] M.V.K. CHARI: *Nonlinear finite-element solution of electrical machines under no-load and full-load conditions*. IEEE Transactions on Magnetics, 10(3):686–689, September 1974. (Zitiert auf Seite 43.)
- [59] M.V.K. CHARI: *Finite-element solution of the eddy-current problem in magnetic structures*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-93(1):62–72, January 1974. (Zitiert auf Seite 43.)
- [60] HASSLER WHITNEY: *Geometric Integration Theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, 1957. (Zitiert auf Seite 43.)
- [61] J.C. NEDELEC: *Mixed finite elements in \mathbb{R}^3* . Numerische Mathematik, 35:315–341, 1980. (Zitiert auf den Seiten 43 und 55.)
- [62] A. BOSSAVIT: *A rationale for “edge-elements” in 3-D fields computations*. IEEE Transactions on Magnetics, 24(1):74–79, January 1988. (Zitiert auf den Seiten 43 und 55.)
- [63] A. BOSSAVIT: *Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism*. Science, Measurement and Technology, IEE Proceedings A, 135(8):493–500, November 1988. (Zitiert auf den Seiten 43 und 57.)
- [64] YU ZHU and ANDREAS C. CANGELLARIS: *Multigrid Finite Element Methods for Electromagnetic Field Modeling*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 2006, ISBN 0-471-74110-8. (Zitiert auf den Seiten 43, 51, 56, 58 und 59.)
- [65] ROBERT N. RIEBEN: *A Novel High Order Time Domain Vector Finite Element Method for the Simulation of Electromagnetic Devices*. PhD thesis, University of California, Davis, USA, 2004. (Zitiert auf den Seiten 44 und 115.)
- [66] PETER P. SILVESTER and RONALD L. FERRARI: *Finite Elements for electrical engineers*. Cambridge University Press, Cambridge / New York / Melbourne, 3rd edition, 1996, ISBN 0-521-44953-7. (Zitiert auf den Seiten 46 und 50.)
- [67] JIANMING JIN: *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 2nd edition, 2002, ISBN 0-471-43818-9. (Zitiert auf den Seiten 47, 60 und 101.)

- [68] P. CARNEVALI, R.B. MORRIS, Y. TSUJI, and G. TAYLOR: *New basis functions and computational procedures for p-version finite element analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36(22):1495–1498, November 1993. (Zitiert auf den Seiten 51 und 52.)
- [69] PAVEL ŠOLÍN, KAREL SEGETH, and IVO DOLEŽEL: *Higher-Order Finite Element Methods*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, USA, 2004, ISBN 1-58488-438-X. (Zitiert auf den Seiten 52 und 165.)
- [70] M. AINSWORTH and J. COYLE: *Hierarchical finite element bases on unstructured tetrahedral meshes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 58(14):2103–2130, December 2003. (Zitiert auf Seite 52.)
- [71] J.P. WEBB: *Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 47(8):1244–1253, August 1999. (Zitiert auf den Seiten 52 und 56.)
- [72] P. INGELSTRÖM: *A new set of $H(\text{curl})$ -conforming hierarchical basis functions for tetrahedral meshes*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 54(1):106–114, January 2006. (Zitiert auf den Seiten 52 und 56.)
- [73] R. ABDUL-RAHMAN and M. KASPER: *Orthogonal hierarchical Nédélec elements*. IEEE Transactions on Magnetics, 44(6):1210–1213, June 2008. (Zitiert auf den Seiten 52 und 56.)
- [74] I. BABUSKA, B.A. SZABO, and I.N. KATZ: *The p-version of the finite element method*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 18(3):515–545, June 1981. (Zitiert auf Seite 52.)
- [75] LESZEK DEMKOWICZ: *Computing with hp-ADAPTIVE FINITE ELEMENTS: Volume 1: One and Two Dimensional Elliptic and Maxwell Problems*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, USA, 2007, ISBN 1-58488-671-4. (Zitiert auf Seite 52.)
- [76] D. WELT and J. WEBB: *Finite-element analysis of dielectric waveguides with curved boundaries*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-33(7):576–585, July 1985. (Zitiert auf Seite 52.)
- [77] D. RODGER and J.F. EASTHAM: *A formulation for low frequency eddy current solutions*. IEEE Transactions on Magnetics, MAG-19(6):2443–2446, November 1983. (Zitiert auf Seite 52.)
- [78] A.R. PINCHUK, C.W. CROWLEY, and P.P. SILVESTER: *Spurious solutions to vector diffusion and wave field problems*. IEEE Transactions on Magnetics, 24(1):158–161,

- January 1988. (Zitiert auf Seite 52.)
- [79] D. SUN, J. MANGES, and X. YUAN: *Spurious modes in finite-element methods*. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 37(5):1673–1712, October 1995. (Zitiert auf Seite 52.)
 - [80] N. MABAYA, P.E. LAGASSE, and P. VANDENBULCKE: *Finite element analysis waveguides of optical waveguides*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-29(6):600–605, June 1981. (Zitiert auf Seite 53.)
 - [81] M. KOSHIBA, K. HAYATA, and M. SUZUKI: *Improved finite-element formulation in terms of the magnetic field vector for dielectric waveguides*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-33(3):227–233, March 1985. (Zitiert auf Seite 53.)
 - [82] M. KALTENBACHER and S. REITZINGER: *Appropriate finite-element formulations for 3-D electromagnetic-field problems*. IEEE Transactions on Magnetics, 38(2):513–516, March 2002. (Zitiert auf Seite 53.)
 - [83] M. COSTABLE and M. DAUGE: *Weighted regularization of maxwell equations in polyhedral domains - a rehabilitation of nodal finite elements*. Numerische Mathematik, 93(2):239–277, November 2002. (Zitiert auf Seite 53.)
 - [84] D.R. TANNER and A.F. PETERSON: *Vector expansion functions for the numerical solution of Maxwell's equations*. Microwave and Optical Technology Letters, 2(9):331–334, September 1989. (Zitiert auf Seite 53.)
 - [85] M.L. BARTON and Z.J. CENDES: *New vector finite elements for three-dimensional magnetic field computation*. Journal of Applied Physics, 61(8):3919–3921, April 1987. (Zitiert auf Seite 54.)
 - [86] A. BOSSAVIT and J. C. VÉRITÉ: *A mixed FEM-BIEM method to solve 3-D eddy-current problems*. IEEE Transactions on Magnetics, MAG-18(2):431–435, March 1982. (Zitiert auf Seite 55.)
 - [87] J.P. WEBB: *Edge elements and what they can do for you*. IEEE Transactions on Magnetics, 29(2):1460–1465, March 1993. (Zitiert auf Seite 55.)
 - [88] R.D. GRAGLIA, D.R. WILTON, and A.F. PETERSON: *Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 45(3):329–342, March 1997. (Zitiert auf Seite 56.)
 - [89] M.M. BOTHA: *Fully hierarchical divergence-conforming basis functions on tetrahedral cells, with applications*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 71(2):127–148, July 2007. (Zitiert auf Seite 58.)

- [90] JOHN L. VOLAKIS, ARINDAM CHATTERJEE, and LEO C. KEMPEL: *Finite Element Method for Electromagnetics: Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications*. IEEE Press, New York, NJ, USA, 1998, ISBN 0-7803-3425-6. (Zitiert auf Seite 60.)
- [91] C. CANUTO, M.Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI, and T.A. ZANG: *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 2006, ISBN 3-540-30725-7. (Zitiert auf den Seiten 66, 67, 68 und 70.)
- [92] BENGT FORNBERG: *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge University Press, Cambridge / New York / Melbourne, 1998, ISBN 0-521-64564-6. (Zitiert auf den Seiten 66, 69, 71, 72, 74 und 75.)
- [93] F.X. GIRALDO, J.S. HESTHAVEN, and T. WARBURTON: *Nodal high-order Discontinuous Galerkin methods for the spherical shallow water equations*. Journal of Computational Physics, 181(2):499–525, September 2002. (Zitiert auf Seite 66.)
- [94] B. YANG and J.S. HESTHAVEN: *Multidomain pseudospectral computation of Maxwell's equations in 3-D general curvilinear coordinates*. Applied Numerical Mathematics, 33(1-4):281–289, May 2000. (Zitiert auf Seite 66.)
- [95] JOHN P. BOYD: *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, USA, 2nd edition, 2001, ISBN 0-486-41183-4. (Zitiert auf den Seiten 69, 70 und 72.)
- [96] LLOYD N. TREFETHEN: *Spectral Methods in MATLAB*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, USA, 2000, ISBN 0-89871-465-6. (Zitiert auf Seite 71.)
- [97] E. HAIRER and G. WANNER: *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 2nd edition, 1996, ISBN 3-540-60452-9. (Zitiert auf den Seiten 78 und 80.)
- [98] M. CLEMENS and T. WEILAND: *Numerical algorithms for the FDiTD and FDFD simulation of slowly varying electromagnetic fields*. International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, 12(1-2):3–22, April 1999. (Zitiert auf Seite 78.)
- [99] I. TSUKERMAN: *A stability paradox for time-stepping schemes in coupled field-circuit problems*. IEEE Transactions on Magnetics, 31(3):1857–1860, May 1995. (Zitiert auf Seite 78.)
- [100] ANDREAS MEISTER: *Numerik linearer Gleichungssysteme: Eine Einführung in moderne Verfahren*. Vieweg Verlag, Braunschweig / Wiesbaden, 1999, ISBN 3-528-

- 03135-2. (Zitiert auf den Seiten 79, 89, 116 und 204.)
- [101] YOUSEF SAAD: *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Publishing Company, Boston, 1995. (Zitiert auf Seite 79.)
 - [102] M. CLEMENS, M. WILKE, and T. WEILAND: *Extrapolation strategies in numerical schemes for transient magnetic field simulations*. IEEE Transactions on Magnetics, 39(3):1171–1174, May 2003. (Zitiert auf Seite 79.)
 - [103] M. CLEMENS, M. WILKE, R. SCHUHMANN, and T. WEILAND: *Subspace projection extrapolation scheme for transient field simulations*. IEEE Transactions on Magnetics, 40(2):934–937, March 2004. (Zitiert auf Seite 79.)
 - [104] D. TROMEUR-DERVOULT and Y. VASSILEVSKI: *Choice of initial guess in iterative solution of series of systems arising in fluid flow simulations*. Journal of Computational Physics, 219(1):210–227, November 2006. (Zitiert auf Seite 79.)
 - [105] GSI: *Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH, Planckstr. 1, 64291 Darmstadt, Germany*. www.gsi.de. (Zitiert auf Seite 81.)
 - [106] GSI: *FAIR Conceptual Design Report*. Available online at www.gsi.de, November 2001. (Zitiert auf Seite 81.)
 - [107] A. KOVALENKO: *Status of the Nuclotron*. In *Proceedings of the 4th European Particle Accelerator Conference (EPAC94)*, pages 161–164, London, UK, June 1994. (Zitiert auf Seite 82.)
 - [108] A.M. BALDIN, N.N. AGAPOV, S.A. AVERICHEV, A.M. DONYAGIN, E.I. D’YACHKOV, H.G. KHODZHIBAGIYAN, A.D. KOVALENKO, L.G. MAKAROV, E.A. MATYUSHEVSKY, and A.A. SMIRNOV: *Superconducting fast cycling magnet of the Nuclotron*. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 5(2):875–877, June 1995. (Zitiert auf den Seiten 82 und 102.)
 - [109] W.J. CARR, JR and V.T. KOVACHEV: *Interstrand eddy current losses in Rutherford cable*. Cryogenics, 35(8):529–534, 1995. (Zitiert auf Seite 83.)
 - [110] R. OTMANI, A. DEVRED, and P. TIXADOR: *Interstrand and AC-loss measurements on Rutherford-type cables for accelerator magnet applications*. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 11(1), March 2001. (Zitiert auf Seite 83.)
 - [111] K. H. MESS, P. SCHMÜSER, and S. WOLFF: *Superconducting Accelerator Magnets*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore / New Jersey / London / Hong Kong, 1996, ISBN 981-02-2790-6. (Zitiert auf den Seiten 83 und 139.)
 - [112] S. TAKÁCS: *AC losses in superconducting cables and their expected values in magnetic systems*. Superconductor Science and Technology, 10(10):733–748, 1997. (Zi-

- tiert auf Seite 83.)
- [113] H. DE GERSEM and T. WEILAND: *Finite-element models for superconductive cables with finite interwire resistance*. IEEE Transactions on Magnetism, 40(2):667–670, March 2004. (Zitiert auf Seite 83.)
 - [114] N. AGAPOV, S. AVERICHEV, A. DONYAGIN, I. ELISEEVA, I. KARPUNINA, H. KHODZHIBAGIYAN, A. KOVALENKO, G. KUZNETSOV, V. KUZICHEV, G. MORITZ, C. MÜHLE, P. NIKITAEV, and A. STARIKOV: *Experimental study of a prototype dipole magnet with iron at $T = 80\text{ K}$ for the GSI fast cycling synchrotron*. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 12(1):116–119, March 2002. (Zitiert auf Seite 84.)
 - [115] A. KALIMOV, E. FISCHER, G. HESS, G. MORITZ, and C. MÜHLE: *Investigation of the power losses in a laminated dipole magnet with superconductive coils*. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 14(2):267–270, June 2004. (Zitiert auf den Seiten 84 und 104.)
 - [116] A.D. KOVALENKO, N.N. AGAPOV, V.G. AKSENOV, I.E. KARPUNINA, H.G. KHODZHIBAGIYAN, G.L. KUZNETSOV, M.A. VOEVODIN, G. MORITZ, E. FISCHER, G. HESS, and C. MÜHLE: *Progress in the design and study of a superferric dipole magnet for the GSI fast-pulsed synchrotron SIS100*. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 14(2):321–324, June 2004. (Zitiert auf den Seiten 84 und 104.)
 - [117] S. KOCH, H. DE GERSEM, E. FISCHER, G. MORITZ, and T. WEILAND: *Simulation of eddy-current losses in a fast ramped superconductive dipole magnet*. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 16(2):334–337, June 2006. (Zitiert auf den Seiten 84, 87 und 104.)
 - [118] M.N. WILSON: *Superconducting Magnets*. Clarendon Press, Oxford, 1983, ISBN 0-19-854810-9. (Zitiert auf Seite 85.)
 - [119] M. ALEKSA, S. RUSSENSCHUCK, and C. VÖLLINGER: *Magnetic field calculations including the impact of persistent currents in superconductive filaments*. IEEE Transactions on Magnetism, 38(2):825–828, March 2002. (Zitiert auf Seite 85.)
 - [120] A.D. KOVALENKO, A. KALIMOV, H.G. KHODZHIBAGIYAN, G. MORITZ, and C. MÜHLE: *Optimization of a superferric nuclotron type dipole for the GSI fast pulsed synchrotron*. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 12(1):161–165, March 2002. (Zitiert auf Seite 85.)
 - [121] OPERA: *Vector Fields Ltd., Kidlington, Oxford, UK*. www.vectorfields.com. (Zitiert auf Seite 85.)

- [122] JORGE NOCEDAL and STEPHAN J. WRIGHT: *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1999, ISBN 0-387-98793-2. (Zitiert auf Seite 89.)
- [123] H. DE GERSEM, I. MUNTEANU, and T. WEILAND: *Differential material matrices for the finite integration technique*. The European Physical Journal - Applied Physics, 39(2):165–169, August 2007. (Zitiert auf Seite 89.)
- [124] H. DE GERSEM, I. MUNTEANU, and T. WEILAND: *Construction of differential material matrices for the orthogonal finite-integration technique with nonlinear materials*. IEEE Transactions on Magnetics, 44(6):710–713, June 2008. (Zitiert auf Seite 89.)
- [125] E. FISCHER, R. KURNYSHOV, G. MORITZ, and P. SHCHERBAKOV: *3-D transient process calculations for fast cycling superferric accelerator magnets*. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 16(2):407–410, June 2006. (Zitiert auf den Seiten 95, 120 und 122.)
- [126] S. KOCH, H. DE GERSEM, T. WEILAND, E. FISCHER, and G. MORITZ: *Transient 3D finite element simulations of the SIS100 magnet considering anisotropic, nonlinear material models for the ferromagnetic yoke*. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 18(2):1601–1604, June 2008. (Zitiert auf Seite 96.)
- [127] P. THOMA and T. WEILAND: *A consistent subgridding scheme for the finite difference time domain method*. International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, 9(5):359–374, September 1996. (Zitiert auf Seite 98.)
- [128] S. KOCH, J. TROMMLER, H. DE GERSEM, and T. WEILAND: *Modeling thin conductive sheets using shell elements in magnetoquasistatic field simulations*. IEEE Transactions on Magnetics, 45(3):1292–1295, March 2009. (Zitiert auf Seite 98.)
- [129] T. NAKATA, N. TAKAHASHI, K. FUJIWARA, and Y. SHIRAKI: *3-D magnetic field analysis using special elements*. IEEE Transactions on Magnetics, 26(5):2379–2381, September 1990. (Zitiert auf Seite 98.)
- [130] J.H. MCWHIRTER: *Computation of three-dimensional eddy currents in thin conductors*. IEEE Transactions on Magnetics, MAG-18(2):456–460, March 1982. (Zitiert auf Seite 99.)
- [131] D. RODGER and N. ATKINSON: *Finite element method for 3D eddy current flow in thin conducting sheets*. Science, Measurement and Technology, IEE Proceedings A, 135(6):369–374, July 1988. (Zitiert auf Seite 99.)
- [132] D. RODGER, N. ATKINSON, and P.J. LEONARD: *Transient 3D eddy currents in thin*

- sheet conductors*. IEEE Transactions on Magnetism, 24(6):2691–2693, November 1988. (Zitiert auf Seite 99.)
- [133] D. RODGER, P.J. LEONARD, and H.C. LAI: *Interfacing the general 3D \mathbf{A} - ψ method with a thin sheet conductor model*. IEEE Transactions on Magnetism, 28(2):1115–1117, March 1992. (Zitiert auf Seite 99.)
- [134] L. KRÄHENBÜHL and D. MÜLLER: *Thin layers in electrical engineering. Example of shell models in analysing eddy-currents by boundary and finite element methods*. IEEE Transactions on Magnetism, 29(2):1450–1455, March 1993. (Zitiert auf Seite 99.)
- [135] C. GUÉRIN, G. TANNEAU, G. MEUNIER, P. LABIE, T. NGNEGUEU, and M. SACOTTE: *A shell element for computing 3D eddy currents - application to transformers -*. IEEE Transactions on Magnetism, 31(3):1360–1363, May 1995. (Zitiert auf Seite 99.)
- [136] J. GYSELINCK, R.V. SABARIEGO, P. DULAR, and C. GEUZAIN: *Time-domain finite-element modeling of thin electromagnetic shells*. IEEE Transactions on Magnetism, 44(6):742–745, June 2008. (Zitiert auf Seite 99.)
- [137] C. GUÉRIN, G. TANNEAU, and G. MEUNIER: *3D eddy current losses calculation in transformer tanks using the finite element method*. IEEE Transactions on Magnetism, 29(2):1419–1422, March 1993. (Zitiert auf Seite 99.)
- [138] J. SAKELLARIS, G. MEUNIER, X. BRUNOTTE, C. GUÉRIN, and J.C. SABONNADIÈRE: *Application of the impedance boundary condition in a finite element environment using the reduced potential formulation*. IEEE Transactions on Magnetism, 27(6):5022–5024, November 1991. (Zitiert auf Seite 99.)
- [139] A. DARCHERIF, A. RAIZER, J. SAKELLARIS, and G. MEUNIER: *On the use of the surface impedance concept in shielded and multiconductor cable characterization by the finite element method*. IEEE Transactions on Magnetism, 28(2):1446–1449, March 1992. (Zitiert auf Seite 99.)
- [140] S. YUFEREV and N. IDA: *Time domain surface impedance boundary conditions of high order of approximation*. IEEE Transactions on Magnetism, 34(5):2605–2608, September 1998. (Zitiert auf Seite 99.)
- [141] J. SAKELLARIS, G. MEUNIER, A. RAIZER, and A. DARCHERIF: *The impedance boundary condition applied to the finite element method using the magnetic vector potential as state variable: A rigorous solution for high frequency axisymmetric problems*. IEEE Transactions on Magnetism, 28(2):1643–1646, March 1992. (Zitiert auf Seite 100.)

- [142] Z. REN: *Degenerated Whitney prism elements - general nodal and edge shell elements for field computation in thin structures*. IEEE Transactions on Magnetics, 34(5):2547–2550, September 1998. (Zitiert auf den Seiten 100 und 101.)
- [143] E. ABENIUS and F. EDELVIK: *Thin sheet modeling using shell elements in the finite-element time-domain method*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 54(1):28–34, January 2006. (Zitiert auf Seite 100.)
- [144] GSI: *FAIR Baseline Technical Report*. Available online at www.gsi.de, March 2006. (Zitiert auf den Seiten 103, 104 und 146.)
- [145] A. KOVALENKO, N. AGAPOV, E. FISCHER, H. KHODZHIBAGIYAN, G. KUZNETSOV, G. MORITZ, and A. SMIRNOV: *New results on minimizing ac power losses in a fast cycling 2 T superferric dipole with a cold yoke*. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 16(2):338–341, June 2006. (Zitiert auf Seite 104.)
- [146] R. KURNYSHOV, P. SHCHERBAKOV, and E. FISCHER: *Report on Finite Element R&D, contract No 1*. GSI, December 2004. (Zitiert auf den Seiten 105, 122 und 123.)
- [147] CST: *Computer Simulation Technology AG, Darmstadt, Germany*. www.cst.com. (Zitiert auf Seite 106.)
- [148] MATLAB®: *The MathWorks, Inc., Natick, MA, USA*. www.mathworks.com. (Zitiert auf den Seiten 106 und 107.)
- [149] M.W. GEE, C.M. SIEFERT, J.J. HU, R.S. TUMINARO, and M.G. SALA: *ML 5.0 smoothed aggregation user's guide*. Technical Report SAND2006-2649, Sandia National Laboratories, 2006. (Zitiert auf den Seiten 107 und 116.)
- [150] M. HEROUX, R. BARTLETT, V. HOWLE, R. HOEKSTRA, J. HU, T. KOLDA, R. LEHOUCQ, K. LONG, R. PAWLOWSKI, E. PHIPPS, A. SALINGER, H. THORNQUIST, R. TUMINARO, J. WILLENBRING, and A. WILLIAMS: *An overview of Trilinos*. Sandia National Laboratories, SAND2003-2927, 2003. (Zitiert auf den Seiten 108, 115 und 129.)
- [151] M. HOFER, M. KALTENBACHER, and S. REITZINGER: *Algebraic multigrid preconditioner for harmonic eddy current problems in 3-D*. IEEE Transactions on Magnetics, 40(2):1342–1345, March 2004. (Zitiert auf Seite 108.)
- [152] D. WHITE, P. CASTILLO, B. FASENFEST, R. RIEBEN, and M. STOWELL: *FEM-STER: A C++ class library of higher-order discrete differential forms*. Lawrence Livermore National Laboratory, 2006. (Zitiert auf Seite 115.)
- [153] MPI: *Argonne National Laboratory, Argonne, IL, USA*. www.mcs.anl.gov. (Zitiert auf Seite 115.)

- [154] E. FISCHER, R. KURNYSHOV, and P. SHCHERBAKOV: *Analysis of the eddy current relaxation time effects in the FAIR SIS 100 main magnets*. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 17(2):1173–1176, June 2007. (Zitiert auf Seite 120.)
- [155] JENS TROMMLER: *Transiente Finite-Element-Berechnung der Wirbelstromverluste in dünnen leitfähigen Schichten unter Verwendung von Oberflächenelementen*. Studienarbeit, Technische Universität Darmstadt, 2008. (Zitiert auf Seite 130.)
- [156] H. DE GERSEM, S. KOCH, S.Y. SHIM, E. FISCHER, G. MORITZ, and T. WEILAND: *Transient finite-element simulation of the eddy-current losses in the beam tube of the SIS-100 magnet during ramping*. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 18(2):1613–1616, June 2008. (Zitiert auf Seite 131.)
- [157] PARRY MOON and DOMINA EBERLE SPENCER: *Field Theory Handbook*. Springer-Verlag OHG, Berlin / Göttingen / Heidelberg, 1961. (Zitiert auf Seite 137.)
- [158] S. CASPI, M. HELM, and L.J. LASLETT: *3D field harmonics*. Technical Report LBL-30313, SC-MAG-328, Lawrence Berkeley Laboratory, University Of California, Berkeley, CA 94720, USA, March 1991. (Zitiert auf Seite 137.)
- [159] S. CASPI, M. HELM, and L.J. LASLETT: *The use of harmonics in 3-D magnetic fields*. IEEE Transactions on Magnetism, 30(4):2419–2422, July 1994. (Zitiert auf den Seiten 137 und 138.)
- [160] W.G. DAVIES: *The theory of the measurement of magnetic multipole fields with rotating coil magnetometers*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 311(3):399–436, January 1992. (Zitiert auf den Seiten 138 und 141.)
- [161] W. ACKERMANN: *Utilization of Magnetic Multipoles in V-Code*. In *Presentation given in context of the Seminar „Advances in Electromagnetic Research“*, Hirschegg, Kleinwalsertal, Austria, August 2005. (Zitiert auf Seite 138.)
- [162] S. CASPI, M. HELM, L.J. LASLETT, and V.O. BRADY: *An approach to 3D magnetic field calculation using numerical and differential algebra methods*. Technical Report LBL-32624, SC-MAG-395, Lawrence Berkeley Laboratory, University Of California, Berkeley, CA 94720, USA, July 1992. (Zitiert auf Seite 138.)
- [163] M. VENTURINI and A.J. DRAGT: *Accurate computation of transfer maps from magnetic field data*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 427(1):387–392, May 1999. (Zitiert auf den Seiten 138 und 141.)
- [164] J.G. WANG: *Magnetic field distribution of injection chicane dipoles in Spallation*

- Neutron Source accumulator ring.* Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams, 9(1):012401–1–012401–14, January 2006. (Zitiert auf den Seiten 138 und 141.)
- [165] P. SCHNIZER, B. SCHNIZER, P. AKISHIN, and E. FISCHER: *Magnetic field analysis for superferric accelerator magnets using elliptic multipoles and its advantages.* IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 18(2):1605–1608, June 2008. (Zitiert auf Seite 141.)
- [166] S. KOCH, B. DOLIWA, H. DE GERSEM, and T. WEILAND: *3-D nonlinear magnetostatic simulation of a superconductive magnet using a higher-order finite-element code.* IEEE Transactions on Magnetics, 44(6):1310–1313, June 2008. (Zitiert auf Seite 142.)
- [167] S. KOCH, H. DE GERSEM, and T. WEILAND: *Transient 3d finite element simulations of the field quality in the aperture of the SIS-100 dipole magnet.* IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 19(3):1162–1166, June 2009. (Zitiert auf Seite 149.)
- [168] DENIS SIEVERS: *Anwendung finiter Gruppen zur effizienten Berechnung elektromagnetischer Felder in symmetrischen Strukturen auf Basis der Randelementmethode.* Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2008. (Zitiert auf Seite 154.)
- [169] K. SOLBACH and I. WOLFF: *The electromagnetic fields and the phase constants of dielectric image lines.* IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-26(4):266–274, April 1978. (Zitiert auf Seite 161.)
- [170] R. MITTRA, Y. HOU, and V. JAMNEJAD: *Analysis of open dielectric waveguides using mode-matching technique and variational methods.* IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-28(1):36–43, January 1980. (Zitiert auf Seite 161.)
- [171] O. FARLE, V. HILL, and R. DYCZIJ-EDLINGER: *Finite-element waveguide solvers revisited.* IEEE Transactions on Magnetics, 40(2):1468–1471, March 2004. (Zitiert auf Seite 161.)
- [172] V. BARBERO, G. DAL MUT, G. GRIGOLI, and M. SANTAMARIA: *Axisymmetric analysis and experimental measurements of magnetic field in the end region of a turbine generator.* IEEE Transactions on Magnetics, MAG-19(6):2623–2627, November 1983. (Zitiert auf Seite 161.)
- [173] G. BEDROSIAN, M.V.K. CHARI, M. SHAH, and G. THEODOSSIOU: *Axi-periodic finite element analysis of generator end regions, part I - theory.* IEEE Transactions on Magnetics, 25(4):3067–3069, July 1989. (Zitiert auf Seite 162.)

- [174] D.C. RENEW, S. BLAKE, D.A.H. JACOBS, and P. RUTTER: *A magnetostatic $2\frac{1}{2}$ -dimensional field calculation program for turbogenerators*. IEEE Transactions on Magnetism, MAG-19(6):2317–2320, November 1983. (Zitiert auf Seite 162.)
- [175] G. BEDROSIAN, M.V.K. CHARI, A. DEBLOIS, M.A. PALMO, M. SHAH, and G. THEODOSSIOU: *Axiperiodic finite element analysis of generator end regions, part II - application*. IEEE Transactions on Magnetism, 25(4):3070–3072, July 1989. (Zitiert auf Seite 162.)
- [176] E. PLANTIVE, S. SALON, M.V.K. CHARI, and N. RICHARD: *Advances in the axiperiodic magnetostatic analysis of generator end regions*. IEEE Transactions on Magnetism, 32(5):4278–4280, September 1996. (Zitiert auf Seite 162.)
- [177] BARRY SMITH, PETTER BJØRSTAD, and WILLIAM GROPP: *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge / New York / Melbourne, 1996, ISBN 0-521-49589-X. (Zitiert auf Seite 162.)
- [178] ALFIO QUARTERONI and ALBERTO VALLI: *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Oxford University Press, Oxford / New York, 1999, ISBN 0-19-850178-1. (Zitiert auf Seite 163.)
- [179] SIEMENS AG: *PTD Transformatorenwerk Nürnberg, Katzwanger Straße 150, 90027 Nürnberg*. www.siemens.de. (Zitiert auf Seite 184.)
- [180] S. KOCH, H. DE GERSEM, T. WEILAND, J. HOPPE, and P. HEINZIG: *Simulation of the insulation properties of a HVDC transformer using a hybrid discretization based on finite elements and harmonic functions*. Electrical Engineering, 90(5):331–336, May 2008. (Zitiert auf den Seiten 184 und 190.)
- [181] S. KOCH, H. DE GERSEM, and T. WEILAND: *Hybrid finite-element method for discretising cylindrically symmetric parts in electrotechnical models*. IET Science, Measurement & Technology, 1(1):6–11, June 2007. (Zitiert auf Seite 188.)
- [182] S. KOCH, H. DE GERSEM, and T. WEILAND: *Magnetostatic formulation with hybrid finite-element, spectral-element discretizations*. IEEE Transactions on Magnetism, 45(3):1136–1139, March 2009. (Zitiert auf Seite 196.)
- [183] S. KOCH, H. DE GERSEM, and T. WEILAND: *Hybrid finite-element, spectral-element discretization for translatory symmetric model parts*. IEEE Transactions on Magnetism, 44(6):722–725, June 2008. (Zitiert auf Seite 197.)
- [184] A. WATHEN and D. SILVESTER: *Fast iterative solution of stabilised Stokes systems, part I: using simple diagonal preconditioners*. SIAM Journal on Numerical Analysis,

- 30(3):630–649, June 1993. (Zitiert auf Seite 204.)
- [185] D. SILVESTER and A. WATHEN: *Fast iterative solution of stabilised Stokes systems, part II: using general block preconditioners*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 31(5):1352–1367, October 1994. (Zitiert auf Seite 204.)

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit am Institut für Theorie elektromagnetischer Felder der Technischen Universität Darmstadt. An dieser Stelle möchte ich allen Personen, die direkt oder indirekt zum Gelingen beigetragen haben, herzlich danken. Insbesondere gilt mein Dank:

- Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Weiland für die Bereitstellung einer ausgezeichneten Arbeitsumgebung am Institut sowie für die wissenschaftliche Anleitung.
- Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Kay Hameyer und Herrn Prof. Dr. Oliver Boine-Frankenheim für die Übernahme des Korreferats sowie für die meiner Arbeit entgegenbrachte Aufmerksamkeit und das Interesse.
- Herrn Prof. Dr.-Ir. Herbert De Gerssem für die ausgezeichnete fachliche Betreuung während seiner Zeit am Institut für Theorie elektromagnetischer Felder, sowie auch in der Folgezeit seiner Tätigkeit an der KU Leuven.
- Herrn PD Dr. rer. nat. Erion Gjonaj für die vielen Anregungen und fachlichen Ideen bezüglich der Arbeit und zahlreicher anderer Gebiete.
- Herrn Dr.-Ing. Wolfgang Ackermann für die geduldige und präzise Beantwortung der insbesondere während des Verfassens dieser Arbeit aufgetretenen Fragen.
- Herrn Dr. rer. nat. Andreas (Baha) Barchanski für die angenehme Gesellschaft als Kollege und den inspirierenden Besuch der CEFC im Jahr 2006 in sonnigen Gefilden.
- Herrn Dr. rer. nat. Burkhard Doliwa für die Anregungen hinsichtlich der Implementierung des im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Simulationsprogramms.
- Herrn Prof. Dr.-Ir. Herbert De Gerssem sowie Frau Heike Seiler für die sorgfältige Durchsicht des Manuskriptes und die zahlreichen inhaltlichen und orthographischen Hinweise, die wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.
- Allen ehemaligen und derzeitigen Kollegen am Institut für Theorie elektromagnetischer Felder für die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Abschließend möchte ich meiner Freundin und meinen Eltern für die vielfältige Unterstützung im Vorfeld und insbesondere in der Entstehungsphase dieser Arbeit danken.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Stephan Koch
Geburtsdatum:	28.12.1977
Geburtsort:	Wuppertal

Ausbildung / Werdegang

1988 - 1997:	Besuch der Edith-Stein-Schule in Darmstadt (Gymnasium)
1997:	Abitur (Durchschnittsnote: 1.0)
1997 - 1998:	Grundwehrdienst beim Fernmelderegiment 12 in Karlsruhe
1998 - 2000:	Grundstudium der Elektrotechnik an der Technischen Universität Darmstadt
2000:	Vordiplom im Fach Elektrotechnik (Gesamturteil: gut)
2000 - 2004	Hauptstudium der Elektrotechnik in der Vertiefungsrichtung „Theoretische Elektrotechnik“
2004:	Diplom in Fach Elektrotechnik (Gesamturteil: gut)
seit 2004:	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theorie elektromagnetischer Felder der Technischen Universität Darmstadt